UNIDADE 7 Geometria analítica

Capítulos

capítulo

31 Geometria analítica: ponto e reta

1 Introdução

A Geometria analítica está calcada na idéia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. Assim, as linhas no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações. Com isso, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas, como também interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas.

Essa integração entre Geometria e Álgebra foi responsável por grandes progressos na Matemática e nas outras ciências em geral.

O grande mentor dessa idéia foi René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês que, embora licenciado em Direito, ao alistar-se no exército de Maurício de Nassau, na Holanda, conheceu Isaac Beekman, médico holandês que o estimulou a realizar pesquisas no campo da Física e da Matemática.

No campo da Matemática, Descartes escreveu *La Geométrie*, na qual introduziu as bases da Geometria analítica, como as idéias de eixos e de coordenadas que permitiram traduzir um problema geométrico para a linguagem algébrica e, reciprocamente, dar uma interpretação geométrica a determinadas equações.

Em Geometria analítica estudaremos várias figuras (incluindo as que não representam função) e suas propriedades geométricas por meio de processos algébricos (equações, inequações, sistemas, etc.). Para isso, algumas idéias estudadas nos capítulos 2 e 3 serão retomadas e aprofundadas e outras serão introduzidas.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$), com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, tem como gráfico uma reta não-paralela ao eixo **y**.

Pela equação é possível estudar propriedades dessa reta, assim como, a partir de uma propriedade da reta, se pode identificar uma equação.

Exemplos:

1º) A reta de equação $y = 3x + 7$ é paralela à reta de equação $y = 3x - 8$.

2º) Se a reta passa pela origem $O(0, 0)$, então sua equação é da forma $y = ax$ ou $y = ax + b$, com $b = 0$.

2 Sistema cartesiano ortogonal

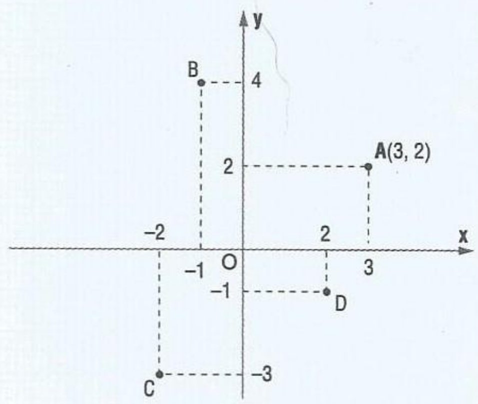
PARA REFLETIR

Os nomes "coordenadas *cartesianas*" (estudadas no capítulo 2, página 40) e "sistema *cartesiano* ortogonal" derivam de Renatus Cartesius, nome de Descartes em latim. Fora da Matemática, *cartesiano* pode também ser usado para designar uma pessoa metódica e sistemática em excesso, uma vez que as idéias filosóficas de Descartes primavam pela sistematização e pelo rigor racional.

Como vimos no capítulo 3, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y), e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto do plano. A relação biunívoca não é única, depende do sistema de eixos ortogonais adotado.

Para estabelecer uma dessas correspondências biunívocas são usados dois eixos ortogonais (eixo **x** e eixo **y**) que formam o *sistema cartesiano ortogonal*. A intersecção dos eixos **x** e **y** é o ponto **O**, chamado de *origem* do sistema.

Exemplo:



Ao par ordenado de números reais:

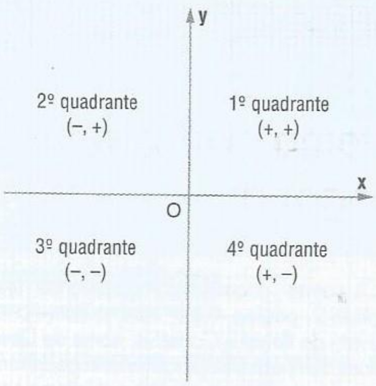
- (0, 0) está associado o ponto O (origem);
- (3, 2) está associado o ponto A;

- $(-1, 4)$ está associado o ponto B;
- $(-2, -3)$ está associado o ponto C;
- $(2, -1)$ está associado o ponto D.

Considerando o ponto A(3, 2), dizemos que o número 3 é a coordenada **x** ou a abscissa do ponto A, e o número 2 é a coordenada **y** ou a ordenada do ponto A.

Observações:

1) Os eixos **x** e **y** chamam-se *eixos coordenados* e dividem o plano em quatro regiões chamadas *quadrantes*, cuja identificação é feita conforme a figura abaixo.
O sinal positivo ou negativo da abscissa e da ordenada varia de acordo com o quadrante.

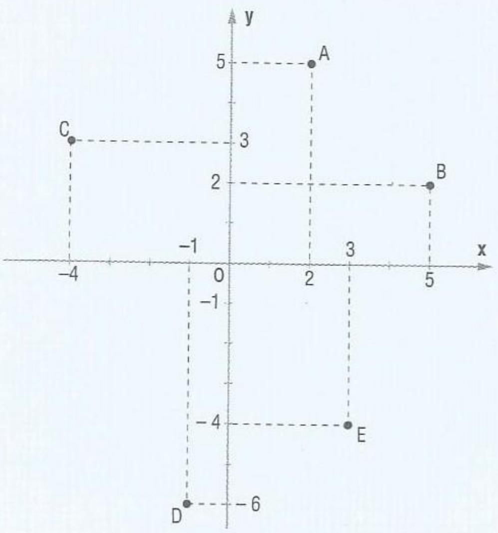


2) Se o ponto P pertence ao eixo **x**, suas coordenadas são $(a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$.
3) Se o ponto P pertence ao eixo **y**, suas coordenadas são $(0, b)$, com $b \in \mathbb{R}$.

PARA REFLETIR O ponto O(0, 0) pertence aos dois eixos.

Exercícios propostos

1. Observe a figura e determine os pontos, ou seja, dê suas coordenadas:



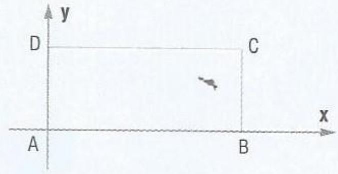
a) A b) B c) C d) D e) E

2. Marque num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais os pontos:

a) $A(1, -2)$
b) $D(0, 3)$
c) $Q(3, -2)$
d) $B(-3, 3)$
e) $P(-1, -5)$
f) $N(0, -4)$
g) $C(4, 4)$
h) $M(-4, 0)$
i) $R(3, 0)$

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

3. No retângulo da figura, $AB = 2a$ e $BC = a$. Dê as coordenadas dos vértices do retângulo.



4. Determine quais são as coordenadas dos pontos pertencentes à bissetriz dos quadrantes:
a) ímpares (1º e 3º); b) pares (2º e 4º).

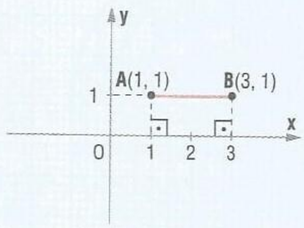
5. Sabendo que $P(2m + 1, -3m - 4)$ pertence ao 3º quadrante, determine os possíveis valores reais de **m**.

3 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por d(A, B), é a medida do segmento de extremidades A e B.

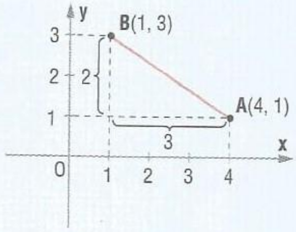
Exemplos:

1º)



$d(A, B) = 3 - 1 = 2$

2º)



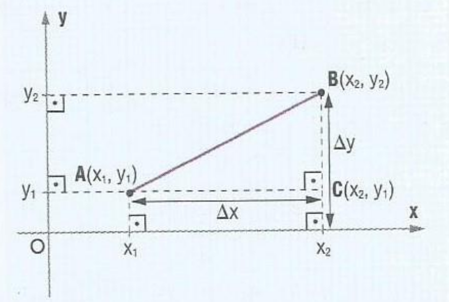
PARA REFLETIR No 2º exemplo foi usada a *relação de Pitágoras*.

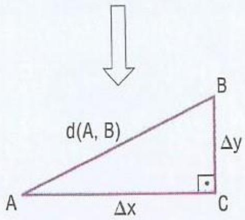
$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{13}$

Fórmula da distância entre dois pontos

Podemos determinar uma expressão que indica a distância entre A e B, quaisquer que sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

O triângulo ABC é retângulo em **C**, logo podemos usar a relação de Pitágoras:





$[d(A, B)]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$
$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Concluímos, então, que a distância entre dois pontos, **A** e **B**, quaisquer do plano, tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é dada por:

PARA REFLETIR A expressão geral obtida independe da localização de **A** e **B**.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

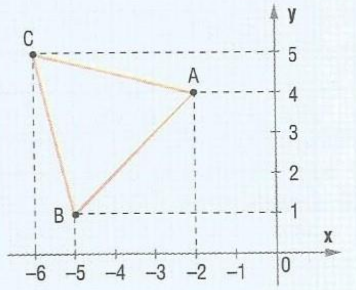
Exemplos:

1º) Um ponto **P**(a, 2) é eqüidistante dos pontos **A**(3, 1) e **B**(2, 4). Vamos calcular a abscissa do ponto **P**.
Como **P** é eqüidistante de **A** e **B**, devemos ter:
$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + (1 - 2)^2} =$
$= \sqrt{(2 - a)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + 1} =$
$= \sqrt{(2 - a)^2 + 4} \Rightarrow (3 - a)^2 + 1 = (2 - a)^2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 - 6a + \cancel{a^2} + 1 = 4 - 4a + \cancel{a^2} + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -6a + 4a = 4 + 4 - 9 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$
Verificando:
$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} d(P, A) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{5} \\ d(P, B) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$
Então, a abscissa do ponto **P** é 1.

Observação: É útil notar que duas distâncias entre dois pontos são iguais se, e somente se, seus quadrados também o são. Portanto, muitas vezes, a extração da raiz quadrada é desnecessária.
Nesse exemplo, poderíamos ter iniciado assim:
$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow [d(P, A)]^2 = [d(P, B)]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (3 - a)^2 + 1 = (2 - a)^2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 - 6a + \cancel{a^2} + 1 = 4 - 4a + \cancel{a^2} + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1$

2º) Vamos demonstrar que o triângulo com vértices **A**(−2, 4), **B**(−5, 1) e **C**(−6, 5) é isósceles.
Um triângulo é isósceles quando tem dois lados congruentes (medidas iguais). Vamos calcular, então, as medidas dos lados do triângulo ABC:

PARA REFLETIR A figura apenas ilustra o exercício. Ela é dispensável na resolução.



- $d(A, B) = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} =$
$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
- $d(A, C) = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} =$
$= \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$
- $d(B, C) = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} =$
$= \sqrt{17}$

Como d(A, C) = d(B, C), o triângulo ABC é isósceles.

Exercícios propostos

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

6. Calcule a distância entre os pontos dados:
a) **A**(3, 7) e **B**(1, 4)
b) **E**(3, −1) e **F**(3, 5)
c) **H**(−2, −5) e **O**(0, 0)
d) **M**(0, −2) e **N**($\sqrt{5}$, −2)
e) **P**(3, −3) e **Q**(−3, 3)
f) **C**(−4, 0) e **D**(0, 3)

7. A distância do ponto **A**(a, 1) ao ponto **B**(0, 2) é igual a 3. Calcule o valor da abscissa **a**.

8. Qual é a distância do ponto **A**(cos a, sen a) ao ponto **B**(sen a, −cos a)?

9. Um ponto **P** pertence ao eixo das abscissas e é eqüidistante dos pontos **A**(−1, 2) e **B**(1, 4). Quais são as coordenadas do ponto **P**?

10. A abscissa de um ponto **P** é −6, e sua distância ao ponto **Q**(1, 3) é $\sqrt{74}$. Determine a ordenada do ponto.

11. Considere um ponto **P**(x, y) cuja distância ao ponto **A**(5, 3) é sempre duas vezes a distância de **P** ao ponto **B**(−4, −2). Nessas condições, escreva uma equação que deve ser satisfeita com as coordenadas do ponto **P**.

12. Demonstre que um triângulo com vértices **A**(0, 5), **B**(3, −2) e **C**(−3, −2) é isósceles e calcule o seu perímetro.

13. Demonstre que os comprimentos das diagonais de um retângulo de lados **a** e **b** são iguais. (Dica: estabeleça um sistema de eixos coordenados e trabalhe com os vértices do retângulo.)

14. Demonstre que os pontos A(6, −13), B(−2, 2), C(13, 10) e D(21, −5) são os vértices consecutivos de um quadrado. (*Sugestão*: verifique que os lados são congruentes e que os ângulos são retos.)

15. Encontre uma equação que seja satisfeita com as coordenadas de qualquer ponto P(x, y) cuja distância ao ponto A(2, 3) é sempre igual a 3.

16. Considere um triângulo com lados que medem **a**, **b** e **c**, sendo **a** a medida do lado maior. Lembre-se de que:
- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo retângulo
- $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo acutângulo
- $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo obtusângulo

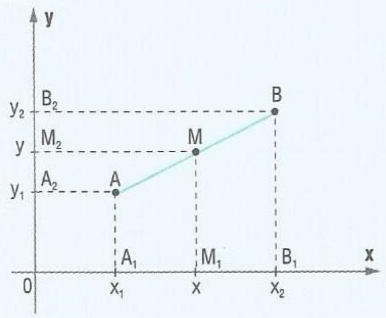
Dados A(4, −2), B(2, 3) e C(6, 6), verifique o tipo do triângulo ABC quanto aos lados (eqüilátero, isósceles ou escaleno) e quanto aos ângulos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo).

4 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos distintos, vamos determinar as coordenadas de M, ponto médio de $\overline{AB}$.

PARA REFLETIR: Por que A e B devem ser pontos distintos?

Considere:
- um segmento com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$;
- o ponto M(x, y), ponto médio do segmento AB.



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1} \Rightarrow 1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_2M_2}{M_2B_2} \Rightarrow 1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow 2y = y_2 + y_1 \Rightarrow y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Então, podemos concluir que, dado um segmento de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

- a abscissa do ponto médio do segmento é a média aritmética das abscissas das extremidades:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

- a ordenada do ponto médio do segmento é a média aritmética das ordenadas das extremidades:

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

PARA REFLETIR
- A demonstração independe da localização de A e B nos quadrantes.
- Chamando de M o ponto médio de $\overline{AB}$, temos: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Exemplos:

1º) Vamos determinar M, ponto médio de $\overline{AB}$, nos seguintes casos:

a) A(3, −2) e B(−1, −6)

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e $B\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

Considerando $M(x_M, y_M)$, temos:

a) $x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_M = \frac{-2 + (-6)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

Logo, M(1, −4).

b) $x_M = \frac{\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

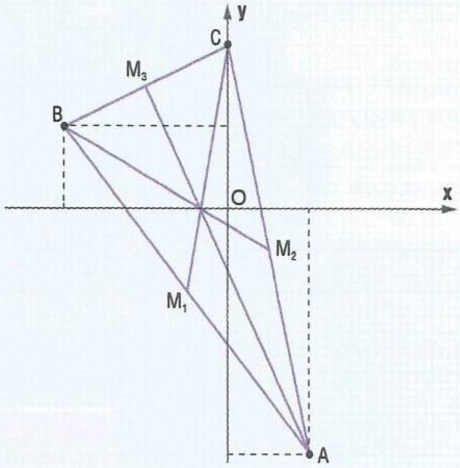
$y_M = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{2}$

Logo, $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2º) Vamos calcular os comprimentos das medianas de um triângulo de vértices A(2, −6), B(−4, 2) e C(0, 4).

PARA REFLETIR
- A *mediana* de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto.
- Todo triângulo possui três medianas que se cruzam num ponto chamado *baricentro* do triângulo.

Observando a figura:



- M_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$; calculando suas coordenadas:

$$x = \frac{-4+2}{2} = -1 \qquad y = \frac{2-6}{2} = -2$$

Então, $M_1(-1, -2)$.

- M_2 é o ponto médio de $\overline{AC}$; calculando suas coordenadas:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1 \qquad y = \frac{4-6}{2} = -1$$

Então, $M_2(1, -1)$.

- M_3 é o ponto médio de $\overline{BC}$; calculando suas coordenadas:

$$x = \frac{0-4}{2} = -2 \qquad y = \frac{4+2}{2} = 3$$

Então, $M_3(-2, 3)$.

Vamos calcular, agora, os comprimentos das medianas:

- mediana $\overline{AM_3}$, sendo $A(2, -6)$ e $M_3(-2, 3)$:

$$d(A, M_3) = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+6)^2} =$$
$$= \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

- mediana $\overline{BM_2}$, sendo $B(-4, 2)$ e $M_2(1, -1)$:

$$d(B, M_2) = \sqrt{(1+4)^2 + (-1-2)^2} =$$
$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

- mediana $\overline{CM_1}$, sendo $C(0, 4)$ e $M_1(-1, -2)$:

$$d(C, M_1) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-4)^2} =$$
$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

Exercícios propostos

17. Determine o ponto médio do segmento de extremidades:

a) $A(1, -7)$ e $B(3, -5)$

b) $A(-1, 5)$ e $B(5, -2)$

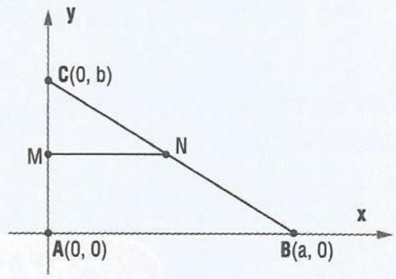
c) $A(-4, -2)$ e $B(-2, -4)$

18. Uma das extremidades de um segmento é o ponto $A(-2, -2)$. Sabendo que $M(3, -2)$ é o ponto médio desse segmento, calcule as coordenadas do ponto $B(x, y)$, que é a outra extremidade do segmento.

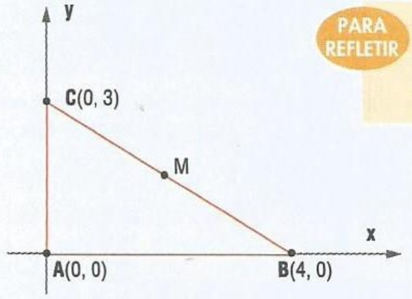
19. Num triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base são segmentos coincidentes. Calcule a medida da altura relativa à base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles de vértices $A(5, 8)$, $B(2, 2)$ e $C(8, 2)$.

20. Num paralelogramo ABCD, $M(1, -2)$ é o ponto de encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sabe-se que $A(2, 3)$ e $B(6, 4)$ são dois vértices consecutivos. Uma vez que as diagonais se cortam mutuamente ao meio, determine as coordenadas dos vértices C e D.

21. Na figura, M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e N é o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Demonstre, analiticamente, que o comprimento do segmento MN é igual à metade do comprimento do lado $\overline{AB}$.



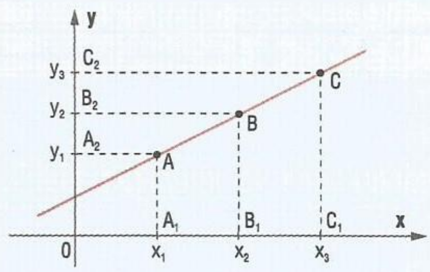
22. A figura mostra um triângulo retângulo ABC. Seja M o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$. Prove, analiticamente, que o ponto M é eqüidistante dos três vértices do triângulo.



PARA REFLETIR A propriedade expressa neste exercício vale para todo triângulo retângulo.

5 Condição de alinhamento de três pontos

Consideremos três pontos A, B e C alinhados:



Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad (1)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + \cancel{x_1y_1} - x_2y_3 + x_2y_1 +$$

$$+ x_1y_3 - \cancel{x_1y_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$$

O primeiro termo da igualdade corresponde ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Daí, podemos dizer que, se três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

PARA REFLETIR Mais uma propriedade geométrica está sendo comprovada por um processo algébrico.

Observação: Fazendo o caminho inverso, podemos verificar também que, se $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, então $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são pontos colineares (recíproca da propriedade anterior).

Exemplo:

Vamos verificar se os pontos $A(-3, 5)$, $B(1, 1)$ e $C(3, -1)$ estão alinhados.

Usando as coordenadas, calculamos o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 1 - 3 - 5 - 3 =$$

$$= +15 - 15 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos estão alinhados.

Exercícios propostos

23. Verifique se os pontos:
   a) $A(0, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(4, 5)$ estão alinhados;
   b) $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$ e $C(-4, 10)$ podem ser os vértices de um triângulo.

24. Determine x de maneira que os pontos $A(3, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(x, 1)$ sejam os vértices de um triângulo.

25. Considerando uma reta r que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(4, 2)$ e intersecta o eixo y no ponto P, determine as coordenadas deste ponto.

26. Uma reta r passa pelos pontos $A(2, 0)$ e $B(0, 4)$. Outra reta s passa pelos pontos $C(-4, 0)$ e $D(0, 2)$. O ponto de intersecção das duas retas é $P(a, b)$. Nessas condições, calcule as coordenadas a e b do ponto P.

27. Dados $A(1, 5)$ e $B(3, -1)$, determine o ponto no qual a reta AB intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

28. Sabendo que $P(a, b)$, $A(0, 3)$ e $B(1, 0)$ são colineares e P, $C(1, 2)$ e $D(0, 1)$ também são colineares, determine as coordenadas de P.

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

6 Coeficiente angular de uma reta

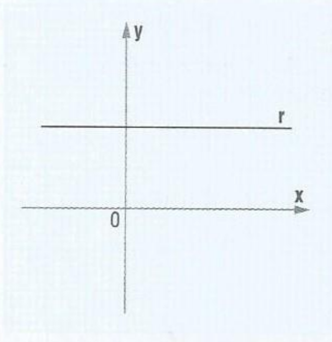
Consideremos uma reta r de inclinação α em relação ao eixo x.

O coeficiente angular ou a declividade dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja:

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

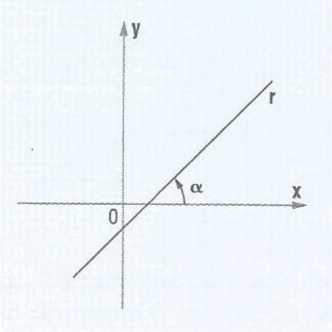
Vamos observar os vários casos, considerando $0° \leq \alpha < 180°$:

1º)



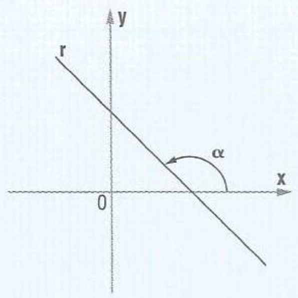
Para $\alpha = 0°$, temos $m = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ 0° = 0$.

2º)



Para $0° < \alpha < 90°$, temos $\text{tg}\ \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$.

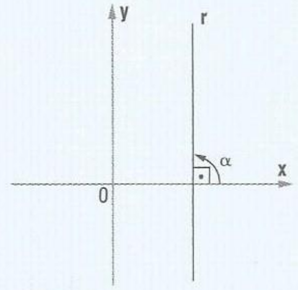
3º)



PARA REFLETIR A declividade de α deve ser sempre considerada do eixo **x** para a reta **r**, no sentido anti-horário.

Para $90° < \alpha < 180°$, temos $\text{tg}\ \alpha < 0 \Rightarrow m < 0$.

4º)

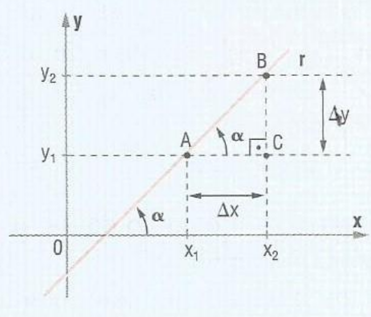


Para $\alpha = 90°$, a tg α não é definida. Dizemos então que, quando $\alpha = 90°$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem declividade.

Vejamos agora que é possível calcular o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos.

Como, para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) a declividade é 0 e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há declividade, vamos analisar os casos de $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$:

1º) $0° < \alpha < 90°$



PARA REFLETIR Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Seja **r** a reta determinada por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e seja $C(x_2, y_1)$.

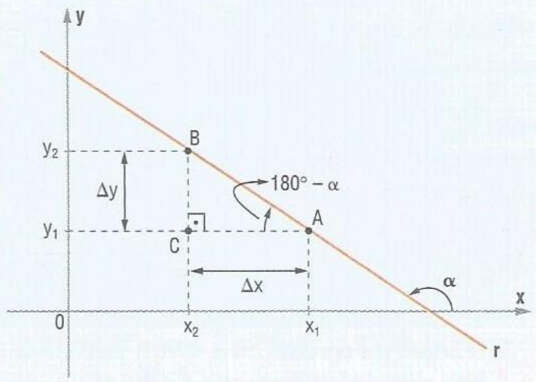
No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2º) $90° < \alpha < 180°$



$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_2, y_1)$

No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\text{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{d(C, B)}{d(C, A)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Como $\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$, vem:

$$-\text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{-(x_1 - x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \text{tg}\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observe que $x_2 \neq x_1$, já que **r** não é paralela ao eixo **y**.

Podemos concluir que, se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são dois pontos distintos quaisquer na reta **r**, que não é paralela ao eixo **y** ($x_1 \neq x_2$), a declividade ou o coeficiente angular de **r**, que indicaremos por **m**, é dada por:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Assim, temos duas maneiras de obter o coeficiente angular de uma reta:

- conhecendo a inclinação α da reta, calculamos $m = \text{tg}\ \alpha$;
- conhecendo dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ da reta, calculamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

PARA REFLETIR Podemos usar $y_1 - y_2$ no numerador desde que, no denominador, usemos $x_1 - x_2$.

Na prática, é mais difícil obter a informação sobre a inclinação da reta, por isso é importante nunca esquecer que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Observação: Agora você pode utilizar um outro método para verificar o alinhamento de três pontos, comparando os coeficientes angulares das retas que passam pelos pontos dois a dois. Por exemplo, na verificação do alinhamento de três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ podemos verificar se acontece $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$. Fica a seu critério usar esse método ou continuar utilizando o determinante para verificar o alinhamento ou não de três pontos.

Exemplo:

Vamos calcular o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos **A**(2, 3) e **B**(4, 7).

$$m = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ou } m = \frac{3-7}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

PARA REFLETIR: O ângulo α é agudo ($0° < \alpha < 90°$), pois $m > 0$. Confirme construindo a figura com **A** e **B**.

Exercícios propostos

29. Determine o coeficiente angular (ou declividade) da reta que passa pelos pontos:

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

a) $A(3, 2)$ e $B(-3, -1)$

b) $A(2, -3)$ e $B(-4, 3)$

c) $P_1(3, 2)$ e $P_2(3, -2)$

d) $P_1(-1, 4)$ e $P_2(3, 2)$

e) $P(5, 2)$ e $Q(-2, -3)$

f) $A(200, 100)$ e $B(300, 80)$

30. Se α é a medida da inclinação de uma reta e **m** é a sua declividade (ou coeficiente angular), complete a tabela:

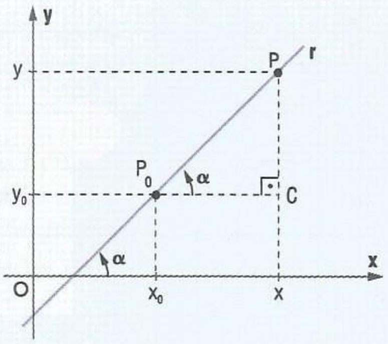
PARA REFLETIR: Use régua e transferidor para traçar a reta **r** que passa por (0, 5) e tem coeficiente angular $-\sqrt{3}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
m								

7 Equação da reta quando são conhecidos um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade m da reta

Vimos que dois pontos distintos determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos.

Da mesma forma, um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade **m** determinam uma reta **r**. Considerando $P(x, y)$ um ponto genérico dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação, de incógnitas **x** e **y**, a partir dos números x_0, y_0 e **m**, que será chamada *equação da reta r*.



Considerando um ponto $P(x, y)$ qualquer sobre a reta e $\text{tg}\,\alpha = m$, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Observações:

1) A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe de **m** ser positivo ou negativo e da localização do ponto P_0.

2) Se a reta é paralela ao eixo **x**, temos $m = 0$ e a equação da reta será dada por $y = y_0$.

3) Se a reta é paralela ao eixo **y**, todos os pontos da reta têm a mesma abscissa e a equação será dada por $x = x_0$.

Exemplos:

1º) Vamos determinar a equação da reta que passa pelo ponto $A(-1, 4)$ e tem coeficiente angular 2.

Usando a equação $(y - y_0) = m(x - x_0)$, temos:

$y - 4 = 2(x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 4 = 2x + 2 \Rightarrow -2x + y - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - y + 6 = 0$

A equação procurada é $2x - y + 6 = 0$.

2º) Vamos determinar a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$.

Já sabemos como calcular o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+2}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Usando o ponto $A(-1, -2)$, temos:

$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y + 6 = 2x + 2 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

Outra resolução:

Chamando de $P(x, y)$ um ponto genérico da reta AB, podemos afirmar que **P**, **A** e **B** estão alinhados.

Logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2x + 5y - 2 + 10 + y - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow 4x - 6y - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

Exercícios propostos

31. Determine a equação da reta que satisfaz as seguintes condições:

a) A declividade é 4 e passa pelo ponto **A**(2, −3).

b) A inclinação é de 45° e passa pelo ponto **P**(4, 1).

c) Passa pelo ponto **M**(−2, −5) e tem coeficiente angular 0.

d) Passa pelos pontos **A**(3, 1) e **B**(−5, 4).

e) Passa pelo ponto **P**(−3, −4) e é paralela ao eixo **y**.

f) Tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$ e passa pelo ponto **A**(2, −3).

g) Passa pelo ponto **P**(1, −7) e é paralela ao eixo **x**.

h) Passa pelos pontos **A**(1, 1) e **B**(−2, −2).

i) A inclinação é de 150° e passa pela origem.

32. Verifique se o ponto **P**(2, 3) pertence à reta **r** que passa pelos pontos **A**(1, 1) e **B**(0, −3).

Desafio

(Fuvest-SP) Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P**(2, 3) e pelo ponto **O**, simétrico de **P** em relação à origem.

PARA REFLETIR: O simétrico do ponto **P**(a, b) em relação à origem é o ponto **O**(−a, −b).

8 Formas da equação da reta

Forma reduzida da equação da reta

Vimos que a equação da reta que passa por um ponto **P**(x_0, y_0) com declividade **m** é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Se escolhermos o ponto particular (0, n), isto é, o ponto em que a reta intersecta o eixo **y**, para o ponto (x_1, y_1), pela equação anterior teremos $y - n = m(x - 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - n = mx \Rightarrow$ $\boxed{y = mx + n}$.

O número real **n**, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo **y**, é chamado *coeficiente linear da reta*.

$$y = \underbrace{m}_{\text{coeficiente angular}}x + \underbrace{n}_{\text{coeficiente linear}}$$

Essa forma é especialmente importante porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada **y** em função de **x**. É conhecida como *forma reduzida* da equação da reta.

PARA REFLETIR: A equação reduzida de uma reta que passa pela origem é da forma y = mx.

Note que a forma reduzida é uma função afim. Reveja o capítulo 3 para ler mais a respeito disso.

Equação geral da reta

Toda reta do plano possui uma equação da forma $\boxed{ax + by + c = 0}$, na qual **a**, **b** e **c** são constantes e **a** e **b** não são simultaneamente nulos. Ela é denominada *equação geral da reta*.

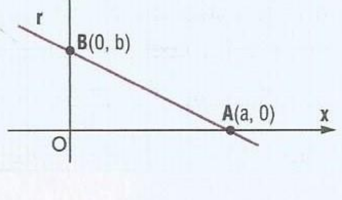
Exemplo:

A reta:

- $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser escrita na forma geral por $3x + 4y - 4 = 0$.
- $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada na forma geral por $5x + 2y - 10 = 0$.
- $y = 5$, que é paralela ao eixo **x**, pode ser dada por $0x + 1y - 5 = 0$.
- $y - 3 = 5(x - 1)$ pode ser dada por $5x - 1y - 2 = 0$.

Forma segmentária da equação da reta

Consideremos uma reta **r** que não passa por (0, 0), intersecta o eixo Ox no ponto **A**(a, 0) e intersecta o eixo Oy no ponto **B**(0, b).



Calculando o coeficiente angular, temos:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Usando a forma reduzida $y = mx + n$, em que

$m = -\frac{b}{a}$ e $n = b$, vem:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab$$

Dividindo os dois membros por ab ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), temos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

PARA REFLETIR Podemos chegar ao mesmo resultado considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e fazendo $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Esta é a denominada *forma segmentária* da equação da reta que não passa por $(0, 0)$ e intersecta os eixos nos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Observações:

1ª) Vimos que a equação da reta pode ser escrita de várias formas. Na resolução de exercícios devemos escolher a mais conveniente em relação aos dados e à proposta do problema.

Assim:

- na forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, identificamos a inclinação α da reta ($m = \text{tg}\ \alpha$) e um ponto da reta (x_0, y_0);
- na forma reduzida $y = mx + n$, identificamos a inclinação α ($m = \text{tg}\ \alpha$), o ponto de intersecção da reta com o eixo **y** $(0, n)$ e ainda o ponto $(1, m + n)$;
- na forma segmentária $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, identificamos os pontos de intersecção da reta com os eixos: $(a, 0)$ e $(0, b)$;
- quando fazemos $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, identificamos sem fazer cálculos dois pontos da reta (x_1, y_1) e (x_2, y_2);
- a forma geral $ax + by + c = 0$ pode ser obtida a partir de qualquer uma das anteriores.

2ª) A mesma reta pode ter diversas representações na forma geral, ou seja, $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$, $-x - 2y + 1 = 0$ e infinitas equações equivalentes a essas. Por essa razão, é preferível escrever "obter *uma* equação geral da reta" a "obter *a* equação geral da reta".

3ª) Dada uma equação geral de uma reta **r**: $ax + by + c = 0$, seu coeficiente angular pode ser obtido rapidamente usando $m_r = \frac{-a}{b}$.

4ª) A reta **r** tal que $ax + by + c = 0$ intersecta os eixos nos pontos $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ e $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

PARA REFLETIR Justifique a 3ª e a 4ª observações.

Exemplo:

Vamos escrever nas formas reduzida, segmentária e geral a equação da reta que passa pelo ponto $(1, -6)$ e tem inclinação de 135°.

Pelos dados do problema é mais conveniente escrever inicialmente a equação na forma $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Como $\alpha = 135°$, então:

$m = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ 135° = -1$

E, como a reta passa por $(1, -6)$, temos:

$y + 6 = -1(x - 1)$

Daí vem:

- forma reduzida:
  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = -x + 1 - 6 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = -x - 5$
- forma segmentária:
  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x + y = -5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{-5} = 1$
- forma geral:
  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y - 1 + 6 = 0 \Rightarrow x + y + 5 = 0$

PARA REFLETIR
- Essa reta tem inclinação de 135°, passa pelo ponto $(1, -6)$ e corta os eixos em $(-5, 0)$ e $(0, -5)$.
- O triângulo que ela determina com os eixos é um triângulo retângulo isósceles. Calcule a medida da hipotenusa.

Exercícios propostos

33. Em cada caso, escreva uma equação geral da reta definida pelos pontos **A** e **B**:
a) $A(-1, 6)$ e $B(2, -3)$
b) $A(-1, 8)$ e $B(-5, -1)$
c) $A(5, 0)$ e $B(-1, -4)$
d) $A(3, 3)$ e $B(1, -5)$

34. Uma reta passa pelo ponto $P(-1, -5)$ e tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$. Escreva a equação da reta na forma reduzida.

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

35. Escreva na forma segmentária a equação da reta que satisfaz as seguintes condições:
a) Passa pelos pontos $A(3, 0)$ e $B(0, 2)$.
b) Passa pelos pontos $A(5, 0)$ e tem declividade 2.
c) Passa pelos pontos $P_1(4, -3)$ e $P_2(-2, 6)$.
d) Sua equação reduzida é $y = -x + 5$.

36. Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(2, 7)$ e $P_2(-1, -5)$.

PARA REFLETIR Resolva o exercício 36 de três formas diferentes.

37. Escreva a equação:
a) da reta bissetriz dos quadrantes ímpares;
b) da reta bissetriz dos quadrantes pares;
c) do eixo **x**;
d) do eixo **y**.

38. Passe a equação da reta para a forma indicada.
a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, para a forma reduzida;

b) $y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4)$, para a forma geral;

c) $3x + 9y - 36 = 0$, para a forma segmentária;

d) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t + 2 \end{cases}$, para a forma geral.

39. Dada a reta que tem a equação $3x + 4y = 7$, determine sua declividade.

40. Determine a equação da reta de coeficiente angular $m = -2$ e que intersecta o eixo **y** no ponto $A(0, -3)$.

41. Se os pontos $A(3, 5)$ e $B(-3, 8)$ determinam uma reta, calcule o valor de **a** para que o ponto $C(4, a)$ pertença a essa reta.

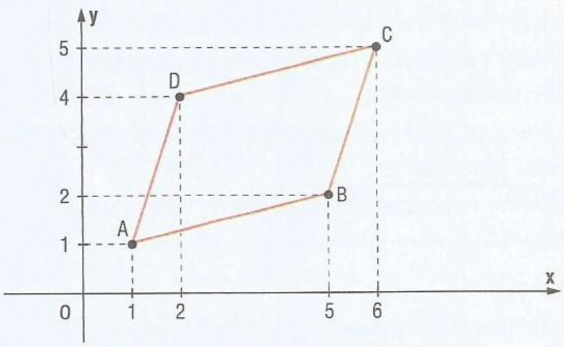
42. Se um triângulo tem como vértices os pontos $A(2, 3)$, $B(4, 1)$ e $C(6, 7)$, determine uma equação geral da reta-suporte da mediana relativa ao lado BC.

43. Se a reta cuja equação geral é $5x - y - 5 = 0$ passa pelo ponto $A(k, k + 3)$, calcule as coordenadas do ponto **A**.

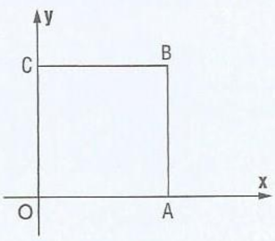
44. Sabendo que os pontos $A(2, 0)$, $B(0, 4)$ e $C(4, 2)$ são os vértices de um triângulo, determine uma equação geral das retas-suporte dos lados desse triângulo.

45. Sabendo que o ponto $P(2, 1)$ pertence à reta de equação $3kx + (k - 3)y = 4$, determine o valor de **k** e escreva, a seguir, uma forma geral da equação dessa reta.

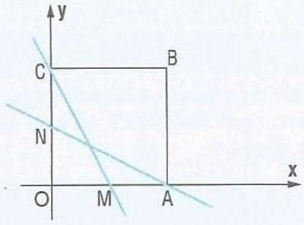
46. Na figura dada, ABCD é um paralelogramo. Determine uma equação geral das retas-suporte das suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.



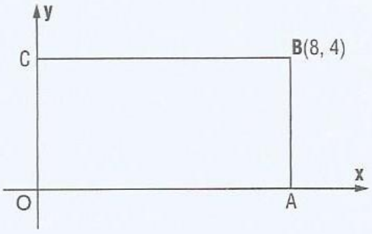
47. Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e OABC é um quadrado de lado 3. Escreva a equação da reta-suporte da diagonal AC.



48. Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e OABC é um quadrado de lado 4. Sabendo que **M** é o ponto médio de $\overline{OA}$ e **N**, o ponto médio de $\overline{OC}$, escreva a equação da reta que passa por **C** e **M** e a equação da reta que passa por **A** e **N**.



49. Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e OABC é um retângulo. Nessas condições, escreva a equação da reta-suporte da diagonal AC.



9 Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas **r** e **s** contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

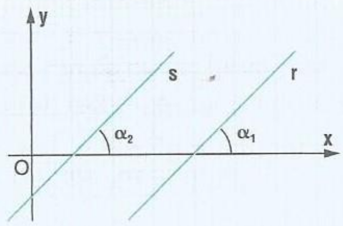
Retas paralelas

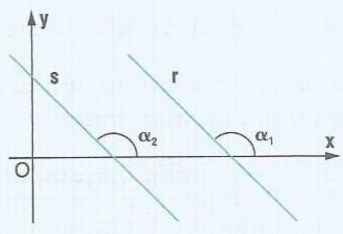
Sendo α_1 a inclinação da reta **r** e α_2 a inclinação da reta **s**, temos:

$m_1 = m_2 \Rightarrow tg\ \alpha_1 = tg\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ (α_1 e α_2 estão entre 0° e 180°)

Se as inclinações são iguais, as retas são paralelas ($r \parallel s$).

Veja as figuras, que mostram duas retas distintas e não-verticais, que são paralelas:





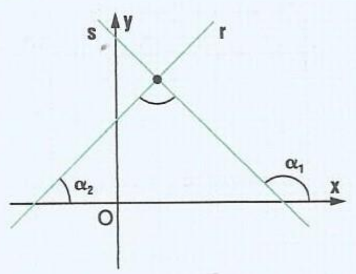
$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow tg\ \alpha_1 = tg\ \alpha_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r \parallel s$

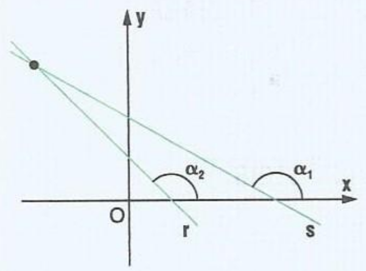
Duas retas distintas e não-verticais **r** e **s** são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais ($m_1 = m_2$).

PARA REFLETIR Se, além do mesmo coeficiente angular, elas têm também o mesmo coeficiente linear, as retas são coincidentes (paralelas iguais).

Retas concorrentes

Duas retas do mesmo plano com coeficientes angulares diferentes não são paralelas; logo, são concorrentes.





$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha_1 \neq \text{tg}\ \alpha_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s}\text{: concorrentes}$$

Duas retas distintas e não-verticais **r** e **s** são concorrentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes ($m_1 \neq m_2$).

Observação: Uma maneira prática de verificar o paralelismo de duas retas é comparar suas equações gerais. Dadas duas retas, **r** e **s**, tal que **r**: $ax + by + c = 0$ e **s**: $a'x + b'y + c' = 0$, então basta compararmos as razões $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ e $\frac{c}{c'}$.

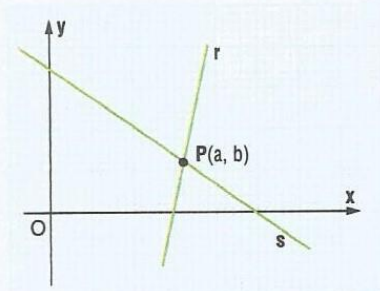
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, então temos a mesma reta representada de duas formas diferentes, em geral conhecidas como paralelas iguais ou coincidentes.
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, então temos duas retas paralelas distintas.
- Se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, então temos duas retas concorrentes.

O termo paralelas iguais (ou coincidentes) só se presta a permitir que se use $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ para definir paralelismo sem nenhuma exceção.

Assim, podemos dizer que, se duas retas **r**: $ax + by + c = 0$ e **s**: $a'x + b'y + c' = 0$ são tais que $ab' = a'b$, então elas são paralelas e vice-versa. É muito importante compreender que, se duas retas são ditas "paralelas iguais" ou "paralelas coincidentes", significa que elas *não são* duas retas, e sim uma só reta, representada de duas formas diferentes.

Intersecção de duas retas

A figura mostra duas retas, **r** e **s**, do mesmo plano, que se intersectam no ponto **P**(a, b).



Como **P** pertence às duas retas, suas coordenadas devem satisfazer simultaneamente às equações dessas duas retas.

Logo, para determiná-las, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

Observação: Pela resolução de sistemas podemos verificar a posição relativa de duas retas. Assim temos:

- sistema possível e determinado (um único ponto comum): retas concorrentes;
- sistema possível e indeterminado (infinitos pontos comuns): retas coincidentes;
- sistema impossível (nenhum ponto comum): retas paralelas distintas.

Exemplo:

Vamos determinar as coordenadas do ponto **P** de intersecção das retas **r** e **s**, de equações $3x + 2y - 7 = 0$ e $x - 2y - 9 = 0$, respectivamente.

O nosso problema consiste em resolver o sistema formado pelas equações das duas retas:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$
$$4x - 16 = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo na segunda equação, por exemplo, temos:

$$4 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow -2y = 5 \Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção são 4 e $-\frac{5}{2}$. Ou seja, $P\left(4, -\frac{5}{2}\right)$.

Exercícios propostos

50. Qual é a posição da reta **r**, de equação $15x + 10y - 3 = 0$, em relação à reta **s**, de equação $9x + 6y - 1 = 0$?

51. Se as retas de equações $(a + 3)x + 4y - 5 = 0$ e $x + ay + 1 = 0$ são paralelas, calcule o valor de **a**.

52. Em cada caso, determine a equação da reta que passa pelo ponto **P** e é paralela à reta da equação dada:
a) $P(1, 2)$ e $8x + 2y - 1 = 0$
b) $P(2, 5)$ e $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
c) $P(4, -4)$ e $x + y - 5 = 0$
d) $P(-1, 3)$ e $2x - 5y + 7 = 0$
e) $P(-4, 2)$ e $y - 2 = 0$
f) $P(2, -5)$ e $x = 2$

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

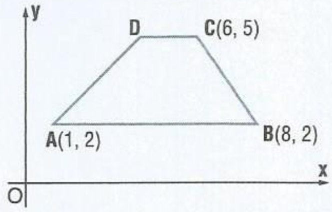
53. (Vunesp) Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, $x + 3y + 4 = 0$ e $2x - 5y - 2 = 0$ são, respectivamente, as equações das retas **r** e **s**. Determine as coordenadas do ponto de intersecção de **r** com **s**.

54. Quais são as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que as equações das retas-suporte de seus lados são $x + 2y - 1 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$ e $y - 5 = 0$?

55. Qual é a equação da reta **r** que passa pelo ponto de encontro das retas t_1 e t_2 de equações $x - y + 2 = 0$ e $3x - y + 6 = 0$, respectivamente, e é paralela à reta **s**, cuja equação é $y = \frac{1}{2}x - 1$?

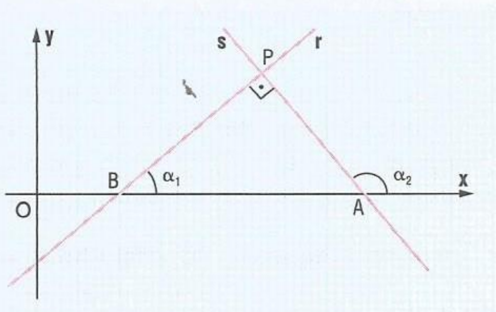
56. (Fuvest-SP) As retas de equações $x + y - 1 = 0$, $mx + y - 2 = 0$ e $x + my - 3 = 0$ concorrem num mesmo ponto. Nessas condições, calcule o valor de **m**.

57. A figura mostra um trapézio ABCD. Determine a equação da reta-suporte da base menor do trapézio.



10 Perpendicularidade de duas retas

A figura mostra a reta **r**, de inclinação α_1, e a reta **s**, de inclinação α_2, tal que **r** e **s** são perpendiculares.



Pela Geometria plana, no triângulo APB, temos:

$\alpha_2 = \alpha_1 + 90° \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_2 = \text{tg}\ (\alpha_1 + 90°) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha_2 = \frac{\text{sen}\ (\alpha_1 + 90°)}{\cos\ (\alpha_1 + 90°)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\ \alpha_1 \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cdot \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_1 \cdot \text{sen}\ 90°}$$

Como $\text{sen}\ 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$, temos:

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{0 + \cos \alpha_1}{0 - \text{sen}\ \alpha_1} = \frac{\cos \alpha_1}{-\text{sen}\ \alpha_1} =$$

$$= -\text{cotg}\ \alpha_1 = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_1}$$

Sabendo que $\text{tg}\ \alpha_2 = m_2$ e $\text{tg}\ \alpha_1 = m_1$, temos

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$, com $m_1, m_2 \neq 0$.

Então, se uma reta **s**, com coeficiente angular $\mathbf{m_2}$, é perpendicular a uma reta **r**, com coeficiente angular $\mathbf{m_1}$:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad (\text{com } m_1, m_2 \neq 0)$$

Reciprocamente, pode-se provar que, dadas uma reta **s**, de coeficiente angular $\mathbf{m_2}$, e uma reta **r**, de coeficiente angular $\mathbf{m_1}$, se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, então **s** é perpendicular a **r**.

Podemos concluir então que, dadas as retas **r** e **s**, de coeficientes angulares $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$, temos:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ ou } r \perp s \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

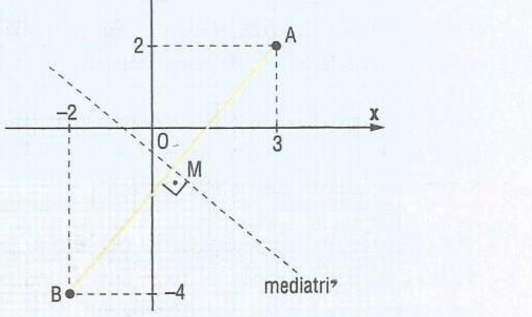
Observação: Uma maneira prática de verificar o perpendicularismo de duas retas **r** e **s**, dadas por suas equações gerais, tal que **r**: $ax + by + c = 0$ e **s**: $a'x + b'y + c' = 0$, é verificar se $aa' + bb' = 0$. Se isso ocorrer, elas serão perpendiculares.

PARA REFLETIR Verifique que $aa' + bb' = 0$, a partir de $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Exemplo:

Vamos determinar a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos $A(3, 2)$ e $B(-2, -4)$.

Pela Geometria plana, sabemos que a mediatriz de um segmento é uma reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio. Na figura, **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$.



- Equação da reta-suporte do segmento AB:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x - 2y - 12 + 4 - 3y + 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - 5y - 8 = 0$

- Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta-suporte:

$6x - 5y - 8 = 0 \Rightarrow -5y = -6x + 8 \Rightarrow 5y = 6x - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{6}{5}$

- Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da mediatriz:

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$$

- Cálculo das coordenadas do ponto **M**:

$$x = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

O problema, agora, fica reduzido a determinar a equação da reta que passa pelo ponto $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e que tem coeficiente angular $-\frac{5}{6}$:

PARA REFLETIR A mediatriz de $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos **P**(x, y) tal que d(P, A) = d(P, B), isto é, dos pontos eqüidistantes de **A** e **B**. Resolva este exemplo usando essa informação.

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 1 = -\frac{5x}{6} + \frac{5}{12} \Rightarrow 12y + 12 = -10x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x + 12y + 7 = 0$

Logo, a equação da mediatriz do segmento é $10x + 12y + 7 = 0$.

Exercícios propostos

58. Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P** e é perpendicular à reta **r** em cada um dos seguintes casos.
   a) **P**(−3, 2) e equação de **r**: $3x + 4y - 4 = 0$;
   b) **P**(2, 6) e equação de **r**: $2x - y + 3 = 0$;
   c) **P**(1, 4) e equação de **r**: $x - y - 1 = 0$;
   d) **P**(3, 5) e equação de **r**: $y - 4 = 0$.

59. (Fuvest-SP) São dados os pontos **A**(2, 3) e **B**(8, 5). Determine a equação da mediatriz de $\overline{AB}$.

60. Qual deve ser o valor de **k** para que as retas **r** e **s**, de equações $kx + y + 5 = 0$ e $3x + (k + 1)y - 9 = 0$, respectivamente, sejam perpendiculares?

61. (PUC-RS) Determine a equação da reta **s**, perpendicular à reta **r** de equação $2x + 3y - 6 = 0$, no ponto em que esta intersecta o eixo das abscissas.

62. (Uece) As retas de equações $y = ax - 4$ e $y = cx + d$ concorrem perpendicularmente no ponto **P**(3, 2). Calcule o valor do coeficiente **d**.

63. Se um triângulo tem como vértices os pontos **A**(2, 1), **B**(−2, −4) e **C**(0, 2), determine a equação da reta-suporte da altura relativa ao lado AB do triângulo.

64. (Faap-SP) São dados os pontos **A**(1, −2), **B**(3, 4) e **C**(c, −1). Calcule a abscissa **c** para que as retas-suporte dos segmentos AB e AC sejam perpendiculares.

65. Dados a reta **r**, de equação $x - y + 1 = 0$, e o ponto **P**(3, 2), quais são as coordenadas da projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**?

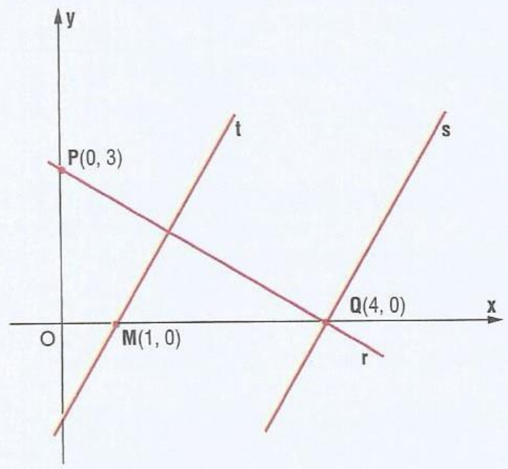
66. Determine as coordenadas do ponto **N**, simétrico ao ponto **M**(2, 4) em relação à reta **r**, de equação $x - y - 6 = 0$.

67. (Fuvest-SP) Os pontos de intersecção da reta **r**, de equação $y = \frac{x}{2} + 2$, com os eixos de coordenadas determinam um segmento. Qual é a equação da mediatriz desse segmento?

68. (FEI-SP) Determine o ponto **P'**, simétrico do ponto **P**(2, 1), em relação à reta **s**, de equação $y = 2x$.

69. Descubra sobre a reta $x - y + 1 = 0$ um ponto **P** eqüidistante dos pontos **A**(3, 0) e **B**(7, 2).

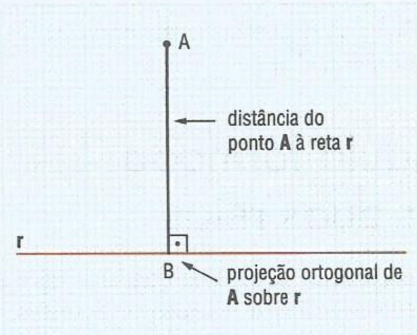
70. (FEI-SP) A reta **s** é perpendicular à reta **r** e a reta **t** é paralela à reta **s**. Determine a equação da reta **s** e a equação da reta **t**.



71. (FEI-SP) Num triângulo retângulo ABC, de hipotenusa BC, tem-se **B**(1, 1) e **C**(3, 2). O cateto que passa pelo vértice **B** é paralelo à reta ℓ, cujo coeficiente angular é $\frac{3}{4}$. Determine as equações das retas-suporte dos catetos AB e AC.

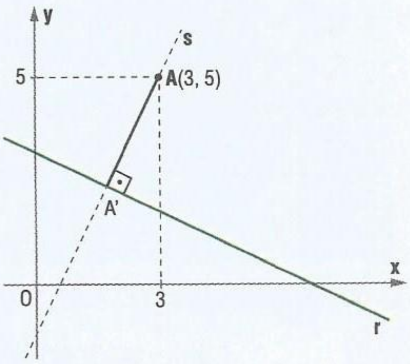
11 Distância entre ponto e reta

Devemos recordar, da Geometria plana, que a distância de um ponto **A** a uma reta **r** é a medida do segmento de extremidades em **A** e **B**, em que **B** é a projeção ortogonal de **A** sobre **r**.



Vamos, por exemplo, determinar a distância entre o ponto **A**(3, 5) e a reta **r**, de equação $x + 2y - 8 = 0$.

A figura mostra que a distância entre o ponto **A** e a reta **r** é a distância entre os pontos **A** e **A'**, e **A'** é a projeção ortogonal do ponto **A** sobre a reta **r**.



- Coeficiente angular de **r**:

$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

- Equação da reta **s**:

$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 5 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$ (equação geral da reta)

- Coordenadas de **A'** (são aquelas do ponto de encontro de **r** e **s**):

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \quad \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \cancel{2y} - 8 = 0 \\ 4x - \cancel{2y} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

Substituindo $x = 2$ na segunda equação, temos:

$2(2) - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 3$

Portanto, **A'**(2, 3).

- Cálculo da distância entre **A** e **A'**:

$$d = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Logo, a distância entre o ponto **A** e a reta **r** é $\sqrt{5}$.

Fórmula da distância entre um ponto e uma reta

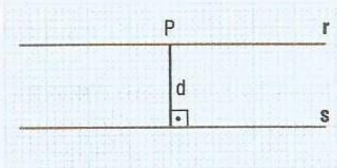
Com o mesmo procedimento do exemplo anterior, para um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta **r** de equação $ax + by + c = 0$, chegamos a uma fórmula que facilita o cálculo da distância de **P** a **r**. Veja:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

PARA REFLETIR Quando temos $d = 0$?

Exemplos:

1º) São dadas as retas **r** e **s** de equações $2x + 3y - 10 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$, respectivamente. Sabendo que essas retas são paralelas, vamos calcular a distância entre elas.



Da Geometria plana, sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância entre um ponto **P** qualquer de uma delas e a outra reta.

- Cálculo das coordenadas de um ponto **P** qualquer da reta **r**:

$2x + 3y - 10 = 0$

Fazendo, arbitrariamente, $x = -1$, temos:

$2(-1) + 3y - 10 = 0 \Rightarrow -2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$

Portanto, **P**(−1, 4).

- Cálculo da distância entre **P** e a reta **s**:

P(−1, 4) e **s**: $2x + 3y - 6 = 0$

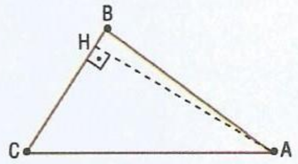
$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) + 3 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|4|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

Logo, a distância entre as retas é $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

PARA REFLETIR É possível demonstrar que, se duas retas **r**: $ax + by + c_1 = 0$ e **s**: $ax + by + c_2 = 0$ são paralelas, então a distância entre elas é dada por $d(r, s) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2º) Um triângulo tem os vértices nos pontos $A(1, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(2, -5)$. Vamos calcular a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$.



Pela figura, vemos que a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é igual à distância entre o ponto **A** e a reta-suporte do lado $\overline{BC}$.

- Equação da reta-suporte do lado BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2y + 15 + 2 + 3y + 5x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x + 5y + 17 = 0$$

- Cálculo da medida da altura:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 17|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{|31|}{\sqrt{41}} = \frac{31}{\sqrt{41}} = \frac{31\sqrt{41}}{41}$$

Logo, a medida da altura é $\frac{31\sqrt{41}}{41}$.

Exercícios propostos

72. Nos seguintes casos, calcule a distância do ponto **P** à reta **r**:
 a) $P(0, 3)$ e $4x + 3y + 1 = 0$
 b) $P(1, -5)$ e $3x - 4y - 2 = 0$
 c) $P(3, -2)$ e $2x + y + 6 = 0$
 d) $P(6, 4)$ e $y - 2 = 0$

73. Dado o ponto $P(3, 2)$, determine a distância de **P** até a reta **r** nos seguintes casos:
 a) $3x + 4y + 1 = 0$
 b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
 c) $y = 2x - 4$
 d) $y = 6$
 e) $x = -1$
 f) $y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$

74. Sendo **A** o ponto de encontro da reta **r**, de equação $x + y - 4 = 0$, com o eixo **x**, determine a distância do ponto **A** à reta **s**, de equação $3x - 4y + 10 = 0$.

75. Sabendo que as retas de equações $4x - 3y + 9 = 0$ e $4x - 3y - 6 = 0$ são paralelas, determine a distância entre as duas retas.

76. Se a distância do ponto $P(0, p)$ à reta **r**, de equação $4x + 3y - 2 = 0$, é igual a 2 unidades, determine a coordenada **p**.

77. Se a distância do ponto $P(k, 2)$ à reta **r**, de equação $3x + 4y - 40 = 0$, é igual a 4 unidades, qual é o valor da coordenada **k**?

Resolva os próximos problemas em dupla.

78. (PUC-SP) Determine a distância do ponto $O(1, 1)$ à reta **t**, cuja equação é $x + y - 3 = 0$.

79. (Cesgranrio-RJ) O ponto $A(-1, -2)$ é um vértice de um triângulo eqüilátero ABC, cujo lado BC está sobre a reta de equação $x + 2y - 5 = 0$. Determine a medida **h** da altura desse triângulo.

80. (Fuvest-SP) Seja **r** a reta que passa pelo ponto $P(3, 2)$ e é perpendicular à reta **s**, de equação $y = -x + 1$. Qual é a distância do ponto $A(3, 0)$ à reta **r**?

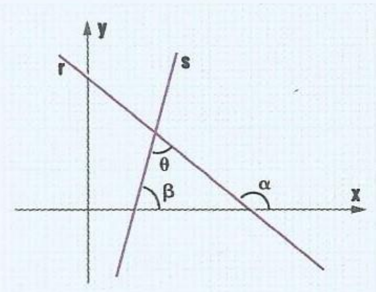
81. (Fuvest-SP) Calcule a distância entre a reta r_1, de equação $3y = 4x - 2$, e a reta r_2, de equação $3y = 4x + 8$, sabendo que $r_1 /\!/ r_2$.

12 Ângulo formado por duas retas

Vamos considerar duas retas concorrentes **r** e **s** oblíquas aos eixos coordenados e não-perpendiculares entre si, de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente. Elas formam entre si o ângulo agudo θ. Então:

$$\theta + \beta = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha - \beta \Rightarrow$$

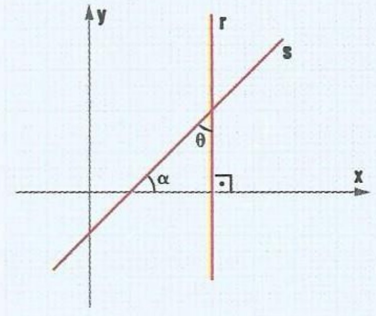
$$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$



Para θ agudo, temos:

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

- Se **r** e **s** forem paralelas, $m_1 = m_2$ e $\theta = 0°$.
- Se **r** e **s** forem perpendiculares, $m_1 m_2 = -1$ e $\theta = 90°$.
- Se uma das retas for vertical, temos:



$$\theta + \alpha = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(90° - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{m}$$

Considerando θ agudo, temos $\text{tg}\,\theta = \left|\frac{1}{m}\right|$.

Exemplo:

Vamos determinar o valor do ângulo agudo formado pelas retas **r**: $y - 4 = 3(x - 5)$ e **s**: $2x + y - 7 = 0$.

- $y - 4 = 3(x - 5) \Rightarrow m_1 = 3$
- $2x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -2x + 7 \Rightarrow m_2 = -2$

Logo:

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{3-(-2)}{1+3(-2)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 45°$$

PARA REFLETIR: As retas **r** e **s** do exemplo formam dois ângulos de 45° e dois ângulos de 135°.

Exercícios propostos

82. Qual é o valor do ângulo agudo formado pelas retas $y = 4x - 6$ e $y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 5)$?

83. Determine a tangente do ângulo agudo formado pelas retas $y = 7$ e $2x - 3y + 5 = 0$.

84. Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P**(2, 1) e forma um ângulo de 45° com a reta de equação $y = 5x + 3$.

85. Calcule a cotangente do ângulo agudo formado pelas retas $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ e $15x - 5y + 2 = 0$.

13 Área de uma região triangular

Vejamos como determinar a área de uma região triangular ABC a partir dos pontos **A**, **B** e **C**.

Pela Geometria plana, sabemos que a área da região triangular da figura é dada por:

$$S = \frac{1}{2}(BC)\cdot(AH)$$

Em Geometria analítica, temos:

- d(B, C) expressa a medida do lado $\overline{BC}$;
- a distância de **A** à reta-suporte do lado $\overline{BC}$ expressa a medida da altura $\overline{AH}$.

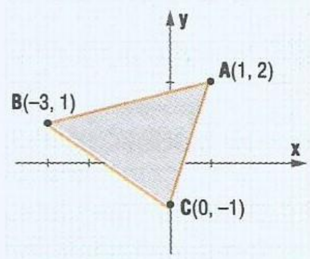
Exemplo:

Vamos calcular a área de uma região triangular ABC que tem vértices nos pontos **A**(1, 2), **B**(−3, 1) e **C**(0, −1).

- Cálculo da medida do lado BC:

$$d(B, C) = \sqrt{(0+3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

- Cálculo da distância entre o vértice **A** e a reta-suporte do lado $\overline{BC}$:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Então:

$$x + 3 + 3y + x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + 3y + 3 = 0$$

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|11|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

- Cálculo da área do triângulo:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{13}}\cdot\frac{11}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{11}{2} \text{ ou } 5{,}5$$

Logo, a área da região triangular é $\frac{11}{2}$ ou 5,5 unidades de área.

Fórmula da área de uma região triangular

Com o mesmo procedimento do exemplo anterior e considerando os pontos não-alinhados **A**(x_1, y_1), **B**(x_2, y_2), e **C**(x_3, y_3), chegamos a uma fórmula que facilita o cálculo da área de uma região triangular:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|D|}$$

PARA REFLETIR: O símbolo |D| indica módulo do determinante **D**.

$$\text{em que } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

coluna das ordenadas

coluna das abscissas

Note que esse determinante é o mesmo que foi estudado no item 5 (página 399) para verificar o alinhamento de três pontos. A conexão entre os dois assuntos está no fato de que, se três pontos que seriam os vértices de um triângulo estiverem alinhados, o triângulo se degenera num segmento de reta; nesse caso, é natural que sua área seja zero.

Exemplo:

Vejamos como fica o cálculo da área da região triangular ABC com **A**(1, 2), **B**(−3, 1) e **C**(0, −1), já feito no exemplo anterior.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 6 + 1 = 11$$

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|11| = \frac{1}{2} \cdot 11 = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Logo, a área da região triangular é $\frac{11}{2}$ ou 5,5 unidades de área.

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Exercícios propostos

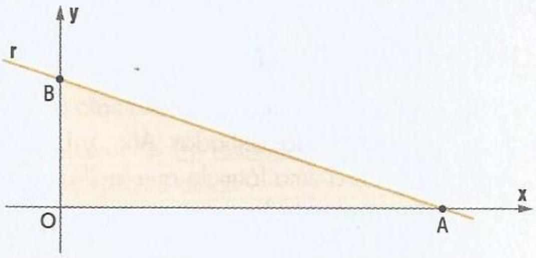
86. Determine a área da região triangular que tem como vértices os pontos **A**(4, 0), **B**(−1, 1) e **C**(−3, 3).

87. As retas-suporte dos lados de um triângulo têm como equações $x + 2y - 1 = 0$, $y - 5 = 0$ e $x - 2y - 7 = 0$. Calcule a área da região triangular.

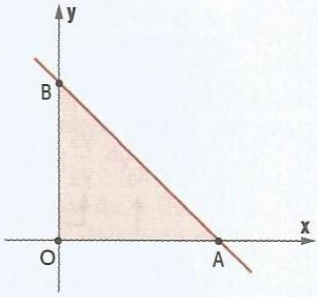
88. Um triângulo tem como vértices os pontos **A**(5, 3), **B**(4, 2) e **C**(2, k). A área da região triangular ABC mede 8 unidades. Nessas condições, calcule o valor de **k**.

89. Sabendo que os vértices de um triângulo são os pontos **A**(m, m), **B**(m, −m) e **C**(0, 0), determine a área da região triangular ABC em função de **m**.

90. Na figura, a reta **r** tem equação $x + 2y - 4 = 0$. Determine a área da região triangular AOB.



91. (UFMG) Na figura, temos que $\overline{AO} = \overline{OB}$ e a área do triângulo OAB é 8 unidades. Determine a equação da reta que passa por A e B.



92. (UFRGS) O ponto **A**, de intersecção das retas **r** e **s** de equações $x - y - 4 = 0$ e $x + y + 2 = 0$, respectivamente, e os pontos **B** e **C**, de intersecção das mesmas retas com o eixo **x**, são os vértices do triângulo ABC. Qual é a área desse triângulo?

93. Calcule a área do quadrilátero de vértices **A**(4, 0), **B**(6, 2), **C**(2, 4) e **D**(0, 2).

94. Obtenha a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC, sabendo que **A**(1, 2), **B**(2, 4), e **C**(5, 3).

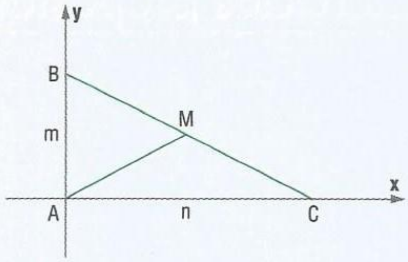
14 Aplicações à Geometria plana

Exemplo:

Escolha um sistema de eixos coordenados adequado e resolva, usando Geometria analítica, o seguinte problema de Geometria plana:

Seja ABC um triângulo retângulo de catetos $\overline{AB}$ medindo **m**, $\overline{AC}$ medindo **n** e hipotenusa $\overline{BC}$. Vamos mostrar que a mediana $\overline{AM}$ mede a metade da hipotenusa.

O mais conveniente é colocar os dois catetos sobre os eixos coordenados; portanto, o vértice **A** deve coincidir com a origem:



Assim, **A**(0, 0), **B**(0, m) e **C**(n, 0) são as coordenadas dos vértices, e $M\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$. O comprimento da hipotenusa $\overline{BC}$ é $d(B, C) = \sqrt{m^2 + n^2}$ e o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é:

$$d(A, M) = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$$

Assim, $d(A, M) = \frac{1}{2} d(B, C)$, como queríamos mostrar.

Exercícios propostos

95. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:
    a) é paralelo ao terceiro lado;
    b) tem comprimento igual à metade do comprimento do terceiro lado.

96. Dada uma reta **r**: $2x + 3y - 1 = 0$, obtenha uma equação que represente o feixe de retas paralelas a **r**.

97. Dada uma reta **r**: $2x + 3y - 1 = 0$, obtenha uma equação que represente um feixe de retas perpendiculares a **r**.

98. Dados o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta **r**: $ax + by + c = 0$, com $P \notin r$, obtenha a equação da reta **s**:
    a) paralela a **r** e que passa por **P**;
    b) perpendicular a **r** e que passa por **P**.