Questão 1

Sabemos que a pontuação máxima por rodada é de 3x5=15 pontos. Podemos descobrir quantas rodadas é possível obter com pontuações máximas sem ultrapassar 134 pontos fazendo a divisão de 134 por 15.

$$134 = 8 \times 15 + 14 = 120 + 14$$

Assim são necessárias 8 rodadas e ainda sobram 14 pontos.

Pelo item b) são necessárias, no mínimo, 2 rodadas para obter 14 pontos.

Logo, no mínimo, são necessárias 8+2=10 rodadas para obter 134 pontos.

Outra Solução

item a)

Observemos que uma das flechas atingiu a região interna, que vale 5 pontos, caso contrário, Michel obteria, no máximo, 9 pontos nesta rodada. Consequentemente, as outras flechas atingiram a região de 3 pontos. Assim, os pontos obtidos com as flechas foram 5,3 e 3, não necessariamente nesta ordem.

Item b)

Conforme a tabela abaixo, os únicos pontos entre 0 e 15 que Michel não pode obter, em apenas uma rodada, são 1 e 14.

0=0+0+0	4=2+2+0	8=2+3+3=3+5+0	12=2+5+5
1	5=5+0+0=2+3+0	9=2+2+5=3+3+3	13=3+5+5
2=2+0+0	6=2+2+2=3+3+0	10=2+3+5=5+5+0	14
3=3+0+0	7=2+5+0	11=3+3+5	15=5+5+5

Isto se deve aos seguintes fatos:

- a menor pontuação, diferente de zero, é igual a 2. Logo é impossível obter apenas1 ponto em uma única rodada;
- 15 pontos são obtidos, de modo único, quando as três flechas atingirem a região central do alvo. Se uma das flechas não atingir a região central, no máximo Michel obteria 13 pontos em uma rodada. Logo, não é possível obter 14 pontos em uma única rodada.

Item c)

Como 8 x 15 = 120 < 134, sabemos que houve, pelos menos, 9 rodadas neste treino. Vamos supor que seja possível obter 134 pontos em 9 rodadas, e seja n o número de rodadas nas quais a pontuação obtida foi de 15 pontos. Como 9 x 13 = 127 < 134, segue que $n \geq 1$ e, por outro lado, como 9 x 15 = 135 > 134, segue que $n \leq 8$.Assim, a pontuação máxima obtida nesta rodada é de $15n+13(9-n)=2n+127$, ou seja, $134 \leq 2n+127$. Portanto, $17 \leq 2n$, o que contradiz o fato de que $n \leq 8$. Logo, concluímos que não é possível obter 134 pontos em 9 rodadas, ou seja, houve, pelo menos, 10 rodadas. Como 134 = 8 x 15 +14 e é possível obter 14 pontos em duas rodadas, concluímos que Michel pode obter os 134 pontos em 10 rodadas.

<u>Questão 2</u>

item a)

A formiga anda 20+ 10 + 20 = 50 cm até chegar em D.

Item b)

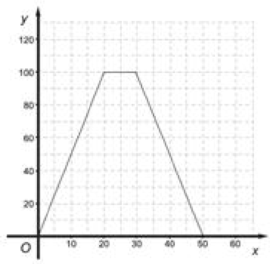
Quando $x = 22$ centímetros ela está no ponto F do segmento BC que dista 2 cm do ponto B. Podemos considerar o segmento AD, com medida 10 cm, a base do triângulo ADF e sua altura será a distância do ponto F à base AD, distância esta igual a 20 cm.Portanto, a área do triangulo será $\frac{10\,.20}{2} = 100$ cm^2.

Item c)

Considerando sempre o segmento AD, com medida 10cm, a base do triângulo, sua área variará com a altura e será máxima quando a altura for máxima, ou seja, quando a altura for 20cm. O cálculo acima nos dá a área máxima igual a 100 cm^2.

Item d)

Quando o ponto F varia no lado AB, $0 \leq x \leq 20$ e o valor da área do triângulo ADF será $\frac{10x}{2} = 5x$. A área será constante e igual a 100 cm^2 quando $20 \leq x \leq 30$. Para $30 \leq x \leq 50$, a expressão para a área será $\frac{10.(50-x)}{2} = -5x + 250$. O gráfico pedido será o da figura ao lado.

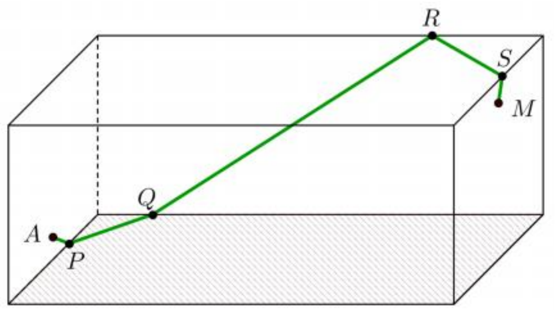


<u>Questão 3</u>

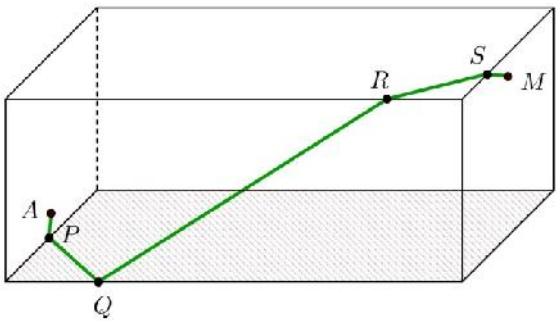
item a)

A distância que a aranha irá percorrer seguindo o caminho vermelho é 60 + 24 = 84.

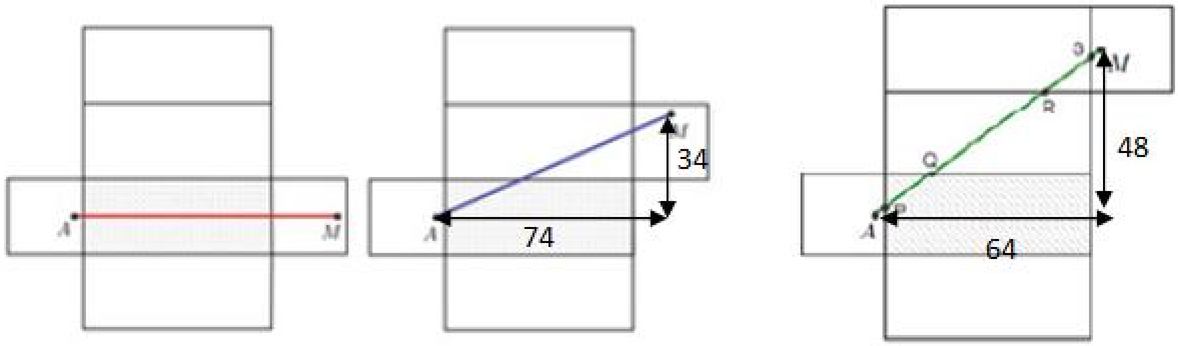
Item b)



ou



Item c)



84 $\qquad \sqrt{34^2+74^2} \approx 81{,}4 \qquad \sqrt{64^2+48^2} = 80$

Usamos o Teorema de Pitágoras e vemos que, dentre os três caminhos, o verde é o mais curto.

<u>Questão 4</u>

item a)

Basta observar na tabela o número que se apresenta na linha do F e na coluna do B, que é o número 2. Portanto, F ultrapassou B duas vezes

Item b)

A casa amarela representa quantas vezes o atleta B ultrapassou o atleta D.No início da corrida B estava à frente de D e como D foi o vencedor da corrida, temos a certeza de que B terminou atrás de D. Portanto, B ultrapassou D uma vez a menos do que D ultrapassou B.Como D ultrapassou B duas vezes, podemos afirmar que B ultrapassou D uma única vez.

Item c)

A casa verde representa quantas vezes o atleta E ultrapassou o atleta B.No início da corrida E estava atrás de B e como E foi o último colocado da corrida, temos a certeza de que E terminou atrás de B. Portanto, E ultrapassou B tantas vezes quanto B ultrapassou E.Como B ultrapassou E três vezes, E também ultrapassou B três vezes.

item d)

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0	1	3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1	3	1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

Já sabemos que D ganhou a corrida e que E foi o último colocado.Comparando os números escritos em posições simétricas em relação à diagonal cinza, concluímos que:

- A começou à frente de B, C e F.
- Como o número de ultrapassagens de A sobre B é igual ao número de ultrapassagens de B sobre A, concluímos que A e B terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de B.
- Do mesmo modo, como o número de ultrapassagens de A sobre Cé igual ao número de ultrapassagens de C sobre A, concluímos que A e C terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de C.
- Por outro lado, como o número de ultrapassagens de A sobre F é igual ao número de ultrapassagens de F sobre A menos 1, concluímos que A terminou atrás de F.

Com isso já podemos concluir que F terminou à frente de A, B e C. Mas B começou à frente de C não houve ultrapassagens entre B e C, logo B terminou à frente de C.

Portanto, a corrida terminou na seguinte ordem:

1º. lugar: D – 2º. lugar: F – 3º. lugar: A – 4º. lugar: B – 5º. lugar: C – 6º. lugar: E.

<u>Questão 5</u>

item a)

As seis maneiras são as seguintes: 1-2-3-4-5, 1-2-3-5-4, 1-2-4-3-5, 1-2-4-5-3, 1-3-2-4-5, 1-3-5-4-2.

Item b)

Basta ele subir pelos degraus ímpares até o mais alto dos ímpares e em seguida ir para o mais alto dos pares e descer pelos degraus pares.

- Exemplo para 10 degraus: 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2
- Exemplo para 11 degraus: 1-3-5-7-9-11-10-8-6-4-2.

Item c)

- Se ele começar com os movimentos 1-2, o problema recairá no caso com 11 degraus e, portanto, será possível completá-lo de 68 maneiras.
- Se ele começar com 1-3-2, então ele terá que ir para o degrau 4 e o problema recairá na mesma situação da escada com 9 degraus e ele terá 31 maneiras para completá-lo.
- Se ele começar com 1-3-4, os degraus 2 e 5 ficarão com um afastamento de 3 degraus e não será possível completar o movimento.
- Se ele começar com 1-3-5, ele não poderá mais descer ou subir um degrau, até atingir o último ímpar para depois voltar pelos pares como descrito no item c e, portanto, haverá apenas uma maneira.

Logo, o número de maneiras de completar a brincadeira será igual a 68 + 31 + 1 = 100 maneiras.

Questão 6

item a)

O 22º da fila, pois até o 21º teremos 21 cartõespara 20 números e podemos afirmar, pelo Princípio dasCasas dePombos, que haverá pelo menos dois cartões com o mesmo número, ou seja, o prêmio já terá saído.

Item b)

Para que o terceiro ganhe, o segundo deve ter um número diferente do primeiro e o terceiro ter um número igual a um dos cartões dos dois primeiros:

$$P_3 = \frac{20x19x2}{20x20x20} = \frac{19}{200} = 9{,}5\%$$

Item c)

Vamos calcular a fração ${}^{P_8}/_{P_7}$:

$$\frac{P_8}{P_7} = \frac{\frac{20x19x18x17x16x15x14x7}{20x20x20x20x20x20x20x20}}{\frac{20x19x18x17x16x15x6}{20x20x20x20x20x2020}} = \frac{\frac{14x7}{20}}{\frac{6}{1}} = \frac{98}{120} < 1$$

Logo $P_8 < P_7$.

Item d)

Vamos calcular a fração ${}^{P_{n+1}}/_{P_n}$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{20x(19).(18).\ldots[20-(n-2)].[20-(n-1)].n}{20.20.20.\ldots20.20}}{\frac{20x(19).(18).\ldots[20-(n-3)].[20-(n-2)].(n-1)}{20x20x20x\ldots.20}} = \frac{\frac{(21-n).n}{20}}{\frac{(n-1)}{1}} = \frac{21n-n^2}{20n-20}$$

Vamos analisar agora a partir de qual n, maior do que 1, P_{n+1} fica menor que P_n, ou seja, $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$

$$\frac{21n-n^2}{20n-20} < 1 \Leftrightarrow 21n - n^2 < 20n - 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 > 0 \Leftrightarrow n > 5 \Leftrightarrow n \geq 6$$

Logo, $P_6 > P_7 > P_8 > \ldots > P_{21}$. Analogamente, $P_{n+1} = P_n$ quando $n^2 - n - 20 = 0$, ou seja, quando n = 5. Logo $P_5 = P_6$ e $P_{n+1} > P_n$ quando $n^2 - n - 20 < 0$, ou seja, quando n < 5. Logo, $P_2 < P_3 < P_4 < P_5$.

A maior probabilidade ocorre para os participantes nas posições 5 e 6.