Questão 1

item a)

Como o algarismo das unidades é 1, para que o número seja aditivado, a soma dos algarismos das casas das dezenas, centenas e unidades de milhar deve ser igual a 1. Existe só um número com quatro algarismos com essas propriedades: 1001.

Item b)

Para que um número aditivado de três algarismos termine em 6, a soma do algarismo das dezenas com o das centenas deve ser igual a 6. Como um tal número não pode ter 0 na casa das centenas, há exatamente seis possibilidades: 156, 246, 336, 426, 516 e 606.

Item c)

Quanto mais algarismos tem um número, maior ele é. Assim, para conseguirmos o maior número aditivado possível, devemos ter 9 na sua casa das unidades, a fim de gerar um número com a maior quantidade possível de algarismos. Na casa das dezenas podemos colocar o algarismo 0, a fim de aumentar a quantidade de algarismos do número que estamos procurando. Como não queremos algarismos repetidos, pelo mesmo motivo, na casa das centenas devemos colocar o algarismo 1 e, na casa das unidades de milhar, o algarismo 2. Para a casa das dezenas de milhar podemos colocar os seguintes algarismos ainda não utilizados: 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Entretanto, os algarismos 7 e 8 estão excluídos pois 72109 e 82109 não são aditivados. Restam quatro possibilidades:

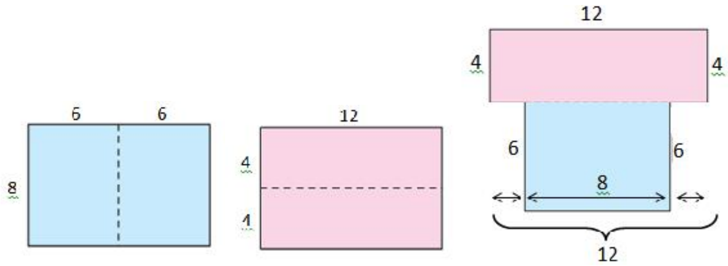
_32109, _42109, _52109 e 62109
(o traço indica onde deve ser colocado o algarismo das centenas de milhar)

Nenhuma das três primeiras possibilidades pode ocorrer, pois, para o número ser aditivado, em cada caso, o algarismo que deveria ser colocado no lugar do traço já foi utilizado antes e repetições não são permitidas. Logo o maior número aditivado sem algarismos repetidos é 62109.

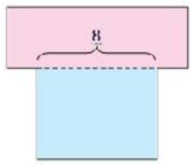
Questão 2

item a)

As dimensões das metades das folhas são, respectivamente, 6 cm x 8 cm e 12cm x4 cm. Para calcular o perímetro a figura "T", observamos que a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais do contorno é 12 + 12 = 24 cm, independente do pedaço azul estar centralizado, e que a soma dos comprimentos verticais do contorno é 4 + 6 + 4 + 6 = 20 cm. Portanto, o perímetro da figura será 20 + 24= 44 cm.

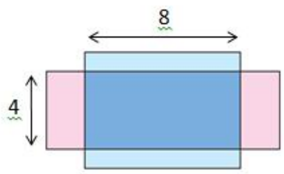


Solução Alternativa. A figura montada por Lucinha tem perímetro igual à soma dos perímetros dos dois pedaços de folha menos 8 cm de cada um desses pedaços, que desaparecem quando as duas folhas são encostadas, conforme indicado pela linha pontilhada na figura abaixo. Portanto, o perímetro da figura em forma da "T" é igual ao perímetro do pedaço azul 8 + 6 + 8 + 6 = 28, mais o perímetro do pedaço rosa 4 + 12 + 4 +12 = 32 emenos 8 + 8 = 16, ou seja, 28 + 32 – 16 = 44 cm.



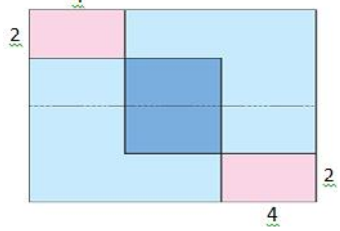
Item b)

O retângulo formado pela sobreposição dos dois pedaços terá dimensões 8 cm x 4 cm, logo, sua área será 32 cm^2.



Item c)

Como a folha rosa tem dimensões 8 cm x 12 cm e cada metade da folha azul 8 cm x 6 cm, temos que cada um dos retângulos não cobertos tem dimensões 4 cm x 2 cm e área 8 cm^2. A área não coberta será, portanto, 16 cm^2.



<u>Questão 3</u>

item a)

Ana pegará 1 palito, Beatriz não pegará palitos e Carlos pegará 9 x 2 =18 palitos, totalizando 19 palitos retirados. Sobrarão, assim, 25 – 19 = 6 palitos.

Item b)

A menor quantidade de palitos restantes corresponde ao número máximo de palitos retirados. Esse número é obtido multiplicando 1, 3 e 9 por 0, 1 ou 2 e somando os resultados. O máximo obtido será 0 x 1+ 1 x 3 + 2 x 9= 0 + 3 + 18 = 21. Podem sobrar, no mínimo, 25 – 21 = 4 palitos.

Item c)

Restarão 14 palitos quando forem retirados 11 deles. O cartão de Carlos não pode ser o de números 0 ou 2, pois, no primeiro caso, o número de palitos retirados seria, no máximo, igual a 1 x 1 + 3 x 2 + 0 x 9 = 7, que é menor que 11 e, no segundo caso, seriam retirados mais de 18 palitos, que é uma quantidade superior a 11. Portanto, Carlos pegou o cartão com o número 1 e retirou 9 palitos. Consequentemente, Ana e Beatriz retiraram, juntas, 2 palitos. Assim sendo, Beatriz não pegou o cartão 2; pegou o cartão 0 e Ana, o cartão 2.

Item d)

Há 6 possibilidades diferentes para as escolhas de cartões feitas por Ana, Beatriz e Carlos. Para cada uma dessas escolhas, a quantidade que sobra de palitos é diferente, conforme mostra a tabela a seguir:

Ana	Beatriz	Carlos	N° de palitos retirados	N° de palitos que sobram
0	1	2	1x0 + 3x1 + 9x2 = 21	4
1	0	2	1x1 + 3x0 + 9x2 = 19	6
0	2	1	1x0 + 3x2 + 9x1 = 15	10
2	0	1	1x2 + 3x0 + 9x1 = 11	14
1	2	0	1x1 + 3x2+ 9x0= 7	18
2	1	0	1x2 + 3x1+ 9x0= 5	20

Estudando a tabela acima, Mônica pode usar, por exemplo, a seguinte estratégia para descobrir os cartões de cada jogador:

- Quando sobram 4 ou 6 palitos, significa que Carlos pegou o cartão de número 2. Portanto, Ana e Beatriz, juntas, retiraram 25 - (18 + 4) = 3 ou 25 - (18 + 6) =1. Consequentemente, as escolhas delas foram, respectivamente, o cartão 0 e o cartão 1, no primeiro caso, ou o cartão 1 e o cartão 0, no segundo caso.
- Quando sobram 10 ou 14 palitos, significa que Carlos pegou o cartão de número 1. Portanto, Ana e Beatriz, juntas, retiraram 25 - (9 + 10) = 6 ou 25 - (9 + 14) = 2. Consequentemente, as escolhas delas foram, respectivamente, o cartão 0 e o cartão 2, no primeiro caso, ou o cartão 2 e o cartão 0, no segundo caso.
- Quando sobram 18 ou 20 palitos, significa que Carlos pegou o cartão de número 0. Portanto, Ana e Beatriz, juntas, retiraram 25 - (0 + 18) = 7 ou 25 - (0 + 20) =5.

Consequentemente, as escolhas delas foram, respectivamente, o cartão 1 e o cartão 2, no primeiro caso, ou o cartão 2 e o cartão 1, no segundo caso.

Em resumo: as sobras mostram diretamente o número do cartão de Carlos, descontando este número de 25, podemos identificar, em seguida, os números dos cartões de Ana e Beatriz.

Vale a pena salientar que os resultados acima estão diretamente vinculados à exprssão de um número na base 3: todo número natural N pode ser expresso de modo único como uma soma de parcelas

$$N = a_0 .3^0 + a_1 .3^1 + a_2 .3^2 + ... a_k .3^k,$$

em que os algarismos a_i pertencem ao conjunto {0, 1, 2}. Na questão acima, os algarismos estão presentes nos cartões e os números 5, 7, 11, 15, 19 e 21 se escrevem de modo único, na base 3, respectivamente como:

$$\begin{aligned}
5 &= 2 .3^0 + 1 .3^1 + 0 .3^2\\
7 &= 1 .3^0 + 2 .3^1 + 0 .3^2\\
11 &= 2 .3^0 + 0 .3^1 + 1 .3^2\\
15 &= 0 .3^0 + 2 .3^1 + 1 .3^2\\
19 &= 1 .3^0 + 0 .3^1 + 2 .3^2\\
21 &= 0 .3^0 + 1 .3^1 + 2 .3^2
\end{aligned}$$

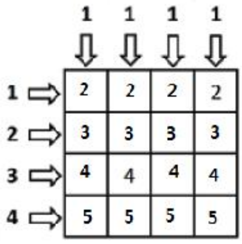
A unicidade das expressões garante o acerto na adivinhação.

Questão 4

item a)

Basta somar, por exemplo, os números que aparecem em uma das diagonais: 19 + 28 + 14 + 9 = 70 ou 21 + 30 + 12 + 7 = 70.

Item b)



O quadrado deve ter o preenchimento ao lado e seu número mágico é 2 + 3 + 4 + 5 = 14.

Item c)

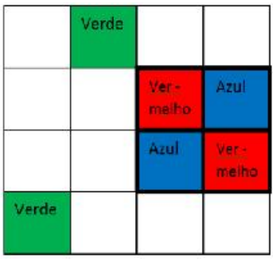
Antes de iniciar o completamento do quadrado, podemos calcular seu número mágico. Basta escolher, dentre os números apresentados, quatro números que não estejam nem na mesma linha nem na mesma coluna que os outros 3 e somá-los. Por exemplo 8 + 8 + 9 + 16 = 41. Precisamos preencher as casas nos quatro cantos do quadrado, sabendo-se agora que o número mágico é 41.

- n^o superior esquerdo + 12 + 9 + 16 = 41, logo, n^o superior esquerdo = 4
- n^o superior direito + 8 + 9 + 16 = 41, logo, n^o superior direito = 8
- n^o inferior esquerdo + 9 + 12 + 3 = 41, logo n^o inferior esquerdo = 7
- n^o. inferior direito + 5 + 12 + 13 = 41, logo n^o inferior direito = 11

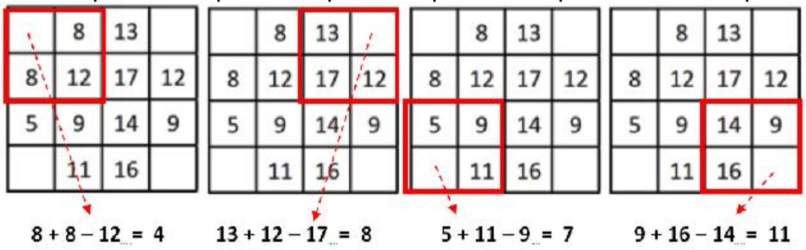
O quadrado fica, então, assim preenchido:

4	8	13	8
8	12	17	12
5	9	14	9
7	11	16	11

Segunda solução:



Sabendo-se que um quadrado possui um número mágico, é fácil ver que escolhendo-se qualquer quadrado menor 2 x 2, então a soma dos dois elementos da diagonal principal deste quadrado é igual à soma dos dois elementos da outra diagonal. Vejamos por que isto ocorre em um exemplo que pode ser facilmente generalizado. A soma dos números que devem aparecer nas casas vermelhas deve ser igual à soma dos números nas casas azuis. De fato, supondo que o quadrado tenha um número mágico, a soma dos números das casas vermelhas com os números das casas verdes deve ser o mesmo que a soma dos números das casas azuis com os números das <u>mesmas</u> casas verdes. Logo, a soma dos dois elementos da diagonal principal deste quadrado 2 x 2 (casas vermelhas) é igual à soma dos dois elementos da outra diagonal (casas azuis). Usando este fato, podemos calcular os números que faltam para completar o quadrado apresentado na questão:



Item d)

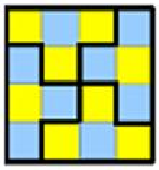
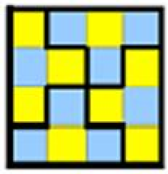
O procedimento usado no item b) sempre produzirá um quadrado cujo número mágico é igual à soma de todos os oito números indicados fora do quadrado, pois ao somarmos números de modo que quaisquer dois deles não estejam nem na mesma linha nem na mesma coluna, estaremos somando os oito números indicados fora do quadrado. Dependendo da escolha dos números, as parcelas desta soma podem aparecer em diferentes ordens, mas são sempre os mesmos oito números que são somados.

Cabe observar que todo quadrado que possui um número mágico é proveniente do processo de soma de números indicados fora dele, como apresentado acima.

<u>Questão 5</u>

item a)

As figuras abaixo apresentam as duas únicas maneiras possíveis, a menos de rotação, de cobrir o tabuleiro 4x4.

Item b)

Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e portanto 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

Item c)

Para cobrir um tabuleiro 10x10, são necessárias 25 peças, uma vez que 100 = 4 x 25. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

Grupo 1: As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).
Grupo 2: As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas.

Se o número de peças do Grupo1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10x10.

Se o número de peças do Grupo1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertos deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10x10.

Questão 6

item a)

Basta observar na tabela o número que se apresenta na linha do F e na coluna do B, que é o número 2. Portanto, F ultrapassou B duas vezes

Item b)

A casa amarela representa quantas vezes o atleta B ultrapassou o atleta D. No início da corrida B estava à frente de D e como D foi o vencedor da corrida, temos a certeza de que B terminou atrás de D. Portanto, B ultrapassou D uma vez a menos do que D ultrapassou B. Como D ultrapassou B duas vezes, podemos afirmar que B ultrapassou D uma única vez.

Item c)

A casa verde representa quantas vezes o atleta E ultrapassou o atleta B. No início da corrida E estava atrás de B e como E foi o último colocado da corrida, temos a certeza de que E terminou atrás de B. Portanto, E ultrapassou B tantas vezes quanto B ultrapassou E. Como B ultrapassou E três vezes, E também ultrapassou B três vezes.

item d)

Já sabemos que D ganhou a corrida e que E foi o último colocado. Comparando os números escritos em posições simétricas em relação à diagonal cinza, concluímos que:

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0	1	3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1	3	1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

- A começou à frente de B, C e F.
- Como o número de ultrapassagens de A sobre B é igual ao número de ultrapassagens de B sobre A, concluímos que A e B terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de B.
- Do mesmo modo, como o número de ultrapassagens de A sobre Cé igual ao número de ultrapassagens de C sobre A, concluímos que A e C terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de C.
- Por outro lado, como o número de ultrapassagens de A sobre F é igual ao número de ultrapassagens de F sobre A menos 1, concluímos que A terminou atrás de F.

Com isso já podemos concluir que F terminou à frente de A, B e C. Mas B começou à frente de C não houve ultrapassagens entre B e C, logo B terminou à frente de C.

Portanto, a corrida terminou na seguinte ordem:

1º. lugar: D – 2º. lugar: F – 3º. lugar: A – 4º. lugar: B – 5º. lugar: C – 6º. lugar: E.