Capítulo 1
Conjuntos Numéricos

1.1 - Introdução

1.2 - Intervalos

Se você deseja ser um bom técnico, engenheiro, físico etc, precisa saber Matemática. Muitos profissionais como: biólogos, economistas, pedagogos etc, já descobriram a necessidade de rever e ampliar seus conhecimentos matemáticos.

A Matemática faz parte de todas as áreas do saber humano, e acredite você, ela está se infiltrando até em História com o nome de cliometria.

Por que a Matemática é tão abrangente? O que a torna tão poderosa?

Se entendermos por Matemática um amontoado de símbolos, números e fórmulas que nos causa medo, estaremos criando em nós uma idéia errônea do que esta ciência realmente é. O nosso raciocínio é poderoso e a Matemática é o leme que direciona nossa inteligência, nosso rigor de pensamento, nossa reflexão, nossa ligação com o universo em busca de uma perfeição que sabemos que existe em todas nossas vidas.

Vamos então juntos aprender Matemática. Lembre–se de que cada um de nós é uma pedra preciosa que, lapidada, torna–se jóia rara.

1.1 Introdução

A finalidade deste capítulo é rever seus conhecimentos sobre os *conjuntos numéricos* e destacar o conjunto dos números reais.

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Os números naturais surgiram da necessidade de se contar objetos.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$$

Se desse conjunto retirarmos o número zero, obteremos o conjunto indicado por $\mathbb{N}^*$, então:

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,...\}$$

A representação do conjunto, quando acompanhada do símbolo *, significa a exclusão do número zero.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{ ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

Número racional é todo número que pode ser escrito na forma de fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros com o *denominador diferente de zero.*

São exemplos de números racionais:

- 2, pois $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = ...$
- -7, pois $-7 = -\frac{7}{1} = -\frac{14}{2} = ...$

- 1,5; pois $1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = ...$
- 0, pois $0 = \frac{0}{4} = \frac{0}{-1} = ...$
- $-0,333...$, pois $-0,333... = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} = ...$
- $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = ...$ (já se encontra na forma de fração)

Assim, o conjunto formado pelos números *inteiros* e os *fracionários* é chamado *conjunto dos números racionais.*

Então:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Conjunto dos Números Irracionais

Número irracional é todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica. O conjunto formado por esses números é chamado *Conjunto dos Números Irracionais.*

São exemplos de números irracionais:

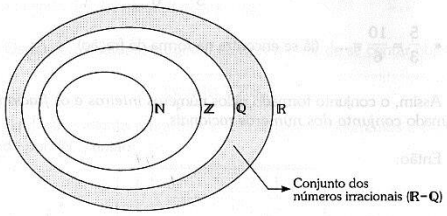
- $\sqrt{2} \cong 1,41421356...$
- $\sqrt[3]{5} \cong 1,7099759...$
- $-\sqrt{3} \cong -1,7320508...$
- $\pi \cong 3,1415926...$
- $\text{sen}\,45° \cong 0,7071067...$

Número irracional é dizima não periódica

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

Reunindo o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, temos o *Conjunto dos números reais.*

Abaixo, temos a relação de inclusão dos conjuntos numéricos vistos.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Possuem símbolos próprios os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}^*$, conjunto dos números reais diferentes de zero.

$\mathbb{R}_+$, conjunto dos números reais não negativos.

$\mathbb{R}_+^*$, conjunto dos números reais positivos.

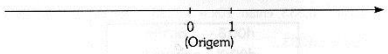
$\mathbb{R}_-$, conjunto dos números reais não positivos.

$\mathbb{R}_-^*$, conjunto dos números reais negativos.

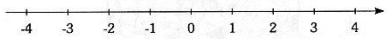
Tais denominações são análogas para os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

A Reta Real

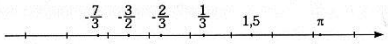
Marcamos numa reta orientada (ou eixo), um ponto qualquer chamado *origem* para representar o número zero e um outro ponto, distinto do anterior, para representar o número um.



Tomando a distância entre esses pontos, marcamos pontos à direita da origem para representar os números inteiros positivos e à esquerda, os inteiros negativos.



Podemos associar a cada ponto dessa reta orientada um único número real e, reciprocamente, para cada número real podemos associar um único ponto da reta orientada.



Esta reta orientada que representa $\mathbb{R}$ chama-se reta real ou eixo real e o número associado a cada ponto desta reta chama-se abscissa do ponto.

Exercícios

1. Escreva na forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$, os números racionais a seguir:

a) 9 b) -5 c) 0 d) 0,4 e) 0,73 f) 3,596

Solução:

a) $9 = \frac{9}{1} = \frac{18}{2} = \frac{27}{3} = ...$ b) $-5 = \frac{-5}{1} = \frac{5}{-1} = \frac{10}{-2} = \frac{-10}{2} = ...$

c) $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{-3} = ...$ d) $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = ...$

e) $0,73 = \frac{73}{100} = \frac{730}{1000} = ...$ f) $3,596 = \frac{3596}{1000} = \frac{1798}{500} = \frac{899}{250} = ...$

2. Ache a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,333... b) 0,171717...

c) 5,222... d) 0,4888...

Solução:

a) Seja x = 0,333, então: 10x = 3,3333... Subtraindo x de 10x, temos:

$$\begin{array}{r} 10x = 3{,}333... \\ -x = -0{,}333... \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$ portanto: $x = \frac{3}{9}$ ou $x = \frac{1}{3}$

b) Seja x = 0,171717..., então: 100 x = 17,1717...Subtraindo x de 100x,

$$\begin{array}{r} 10x = 17{,}1717... \\ -x = -0{,}1717... \\ \hline 99x = 17 \end{array}$$ portanto: $x = \frac{17}{99}$

c) $5{,}222... = 5 + 0{,}222...$

$$5 + \frac{2}{9} = \frac{47}{9}$$

d) $0{,}4888... = \frac{4{,}888...}{10} = \frac{4 + 0{,}888...}{10} = \frac{4 + \frac{8}{9}}{10} = \frac{\frac{44}{9}}{10} = \frac{44}{90} = \frac{22}{45}$

OBSERVAÇÃO

É comum representarmos uma dízima periódica com um traço no seu período (a parte que se repete), assim:

$$0{,}444... = 0{,}\overline{4}$$

$$8{,}2323... = 8{,}\overline{23}$$

3. Escreva os números racionais a seguir, na forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$.

a) 0,7 b) 0,777... c) −2,5

d) 2,2828... e) 0,4333... f) 0,43

g) 3,555... h) 7,1323232... i) 0,247247247...

1.2 Intervalos

Quando você realiza uma prova, geralmente o seu professor marca na lousa o tempo de duração.

Isto significa que sua prova poderá ser entregue em qualquer instante que esteja compreendido entre 8 horas e 10 horas, incluindo 8 horas e 10 horas. Esse conjunto de instantes chama-se intervalo de tempo de extremos 8 e 10.

Assim, os subconjuntos de números reais de extremos a e b, com a<b, chamam-se intervalos.

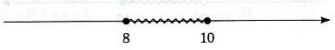
Podemos ter os seguintes tipos de intervalos:

Intervalo Fechado

O conjunto formado por todos os números reais compreendidos, por exemplo, entre 8 e 10, incluindo 8 e 10, chama-se intervalo fechado e o representamos por [8, 10], isto é:

$[8, 10] = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 \leq x \leq 10\}$

Na reta real, tem-se:

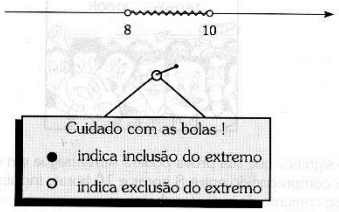


Intervalo Aberto

Se excluirmos os extremos 8 e 10, temos o intervalo aberto e o representamos por]8, 10[, isto é:

$]8, 10[= \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x < 10\}$

Na reta real, tem-se:

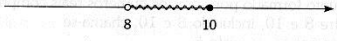


Intervalos Semi-Abertos

Se excluirmos um dos extremos, temos os intervalos semi-abertos:

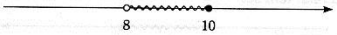
- à esquerda:

$]8, 10] = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x \leq 10\}$



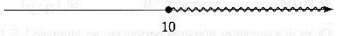
- à direita:

$[8, 10[= \{x \in \mathbb{R} \mid 8 \leq x < 10\}$

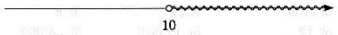


Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são chamados intervalos infinitos

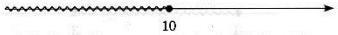
$[10, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$



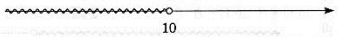
$]10, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$



$]-\infty, 10] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$



$]-\infty, 10[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$



$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Exercícios

4. Escreva em notação de intervalo cada conjunto:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \sqrt{2}\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{7}{5}\}$

5. Represente na reta real, os intervalos:

a) $]-\infty,2]$ b) $[5,9[$ c) $]\frac{1}{7},+\infty[$ d) $]-6,1[$

e) $]4,10]$ f) $]-\infty,-1[$ g) $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ h) $]-\infty,+\infty[$

6. Quais dos seguintes números pertencem ao intervalo $]-5,12]$?

a) -5 b) 0 c) $\frac{-13}{2}$

d) $\sqrt{168}$ e) $\sqrt{2}$ f) π

g) 12 h) $12,001$ i) $-4,999$

7. Escreva em forma de conjuntos, os intervalos representados na reta real:

a)

b) -1 3

c) 2 5

d) 0 $2\sqrt{2}$ 4

8. Determine a reunião dos intervalos A e B nos seguintes casos:

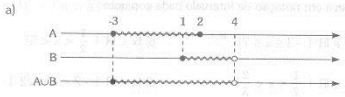
a) $A = [-3,2]$, $B = [1,4[$ b) $A = [-4,0[$, $B = [0,3]$

c) $A =]-5,0]$, $B = [2,6]$ d) $A = [-4,2]$, $B =]0,2[$

Solução:

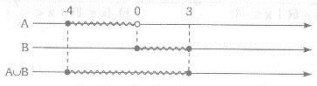
Vamos fazer o "varal" para representar esses intervalos.

a)



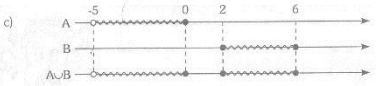
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$

b)



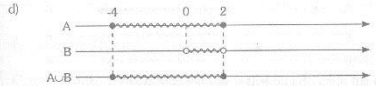
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 3\}$

c)



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 6\}$

d)



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 2\}$

9. Determine a reunião dos seguintes intervalos:

a) $A =]-3,4]$, $B =]4,8]$ b) $A = [-1,0]$, $B =]2,5]$

c) $A =]-\infty,0]$, $B = [0,3[$ d) $A = [6,14[$, $B =]9,15]$

e) $A = [-5,4]$, $B = [1,4[$ f) $A = [1,4[$, $B = [3,6[$, $C = [5,+\infty[$

10. Determine a interseção dos intervalos A e B nos seguintes casos:

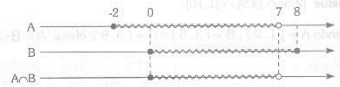
a) $A = [-2,7[$, $B = [0,8]$ b) $A = [3,5]$, $B = [5,7[$

c) $A = [-2,3]$, $B =]3,6]$ d) $A = [0,7]$, $B =]1,7[$

Solução:

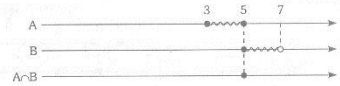
Vamos fazer o "varal" para representar esses intervalos.

a)



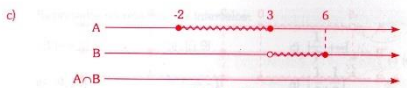
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 7\}$

b)



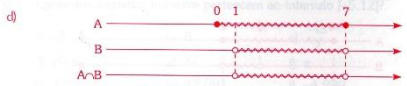
$A \cap B = \{5\}$

c)

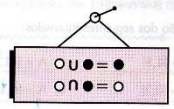


$A \cap B = \varnothing$

d)



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 7\}$



11. Determine a interseção dos intervalos A e B nos seguintes casos:

a) $A = [1,6]$, $B = [2,8]$ b) $A = [0,2]$, $B = [2,4]$

c) $A =]-3,5[$, $B =]0,7[$ d) $A = [-3,2[$, $B =]3,5[$

e) $A =]-\infty,5]$, $B = [2,+\infty[$ f) $A =]1,3]$, $B =]3,7]$

g) $A =]5,7]$, $B =]-\infty,+\infty[$

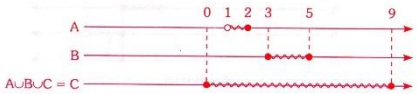
12. Efetue $[2,5] \cap]3,9] \cap]1,10]$.

13. Sendo $A =]\,1, 2\,]$; $B = [\,3, 5\,]$ e $C = [\,0, 9\,]$, efetue $A \cup B \cup C$.

Solução:

Como $A \subset C$ e $B \subset C$ então $A \cup B \cup C = C$

Veja no varal:



14. Sendo $E =]\frac{1}{2},4]$, $F = [2,5[$ e $G =]-1,6]$, obtenha $E \cup F \cup G$.

Pense e Faça

F_1: Soldados em Fila

Como colocar dez soldados em cinco filas, tendo cada fila quatro soldados?

F_2: Tamanho do Trem

Uma vez, estando numa estação, vi chegar um trem que levou 9 segundos passando por mim. Ele levou 21 segundos para atravessar a estação que tinha 80 metros de comprimento. Qual era o comprimento do trem?

F_3: Hora Certa

Embora eu esteja certo de que meu relógio está adiantado 5 minutos, ele está, na realidade, com dez minutos de atraso. Por outro lado, o relógio do meu amigo está realmente 5 minutos adiantado. Nós marcamos um encontro às dez horas e cada um de nós planeja chegar pontualmente em cima da hora. Quem chegará primeiro? Depois de quanto tempo chegará o outro?

F_4: Equação Apaixonada

$$\frac{(AM + BC)\,X}{(X + BOC)\,B} = \frac{AM}{B} - \frac{CTE}{(X + BOC)}$$

F_5: Os Sete Símbolos

Parecem uma espécie de escrita hieroglífica. Mas cada símbolo tem um significado. Descubra qual deve ser o próximo símbolo da série.

2.1 - Introdução
2.2 - Noção de Função
2.3 - Notação de Função
2.4 - Função Inversa
2.5 - Função Composta

Capítulo 2
Função

2.1 Introdução

Não podemos negar o fato de lidarmos com **Matemática** desde que acordamos até quando vamos dormir, sendo assim amplamente reconhecido o estudo dessa ciência.

Através de uma atitude matemática, podemos melhorar nossa rotina diária. Podemos, por exemplo, calcular *quanto gastaríamos de combustível para fazer determinada viagem*, conhecendo os fatores de desempenho do automóvel; podemos *optar por condições mais vantajosas* na compra de um certo produto; podemos *estimar nossa população* daqui a dez anos, e muitas outras situações que fazem parte do nosso cotidiano.

Neste livro, vamos destacar a importância do estudo das **FUNÇÕES**. Mostraremos nesse estudo, como a **leitura de um gráfico** pode nos ajudar a entender melhor um determinado fenômeno, sem muitas palavras.

Atualmente, os gráficos são bastante utilizados em nossos meios de comunicação e possuem aplicações importantes em muitas áreas como Medicina, Economia, Engenharia, Educação, etc.

Em nosso dia–a–dia, ouvimos frases como "*Os políticos, em época de eleição, fazem seus discursos em* **função** *de obter votos*", "Gastamos em **função** do nosso salário", "*A educação é* **função** *de bons exemplos assimilados*". Nestas frases, note que existe uma **relação de dependência** entre *políticos e votos*, *gasto e ganho*, e *educação e bons exemplos*.

A idéia de **função** surge da necessidade de se entender e explicar a realidade.

As palavras **função** e **variável independente** foram usadas pelo filósofo e matemático alemão ***Gottfried Wilhelm Leibniz*** (1646–1716) numa carta ao matemático suíço ***Jean Bernouille*** (1667–1748) onde o termo **função** é mencionado várias vezes e com significado claramente geométrico.

Bernouille passa a utilizar o termo função num sentido mais preciso.

Uma aplicação considerável do conceito de função deve-se aos trabalhos de alguns matemáticos tais como ***D'Alembert, Euler, Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann e Weierstrass***.

Vamos, então, adentrar nesse estudo.

2.2 Noção de Função

Quando estudamos um determinado fenômeno, a primeira idéia que surge é procurar estabelecer uma LEI que associa as grandezas envolvidas.

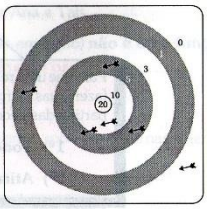
Vamos verificar!

Conceito Intuitivo de Função

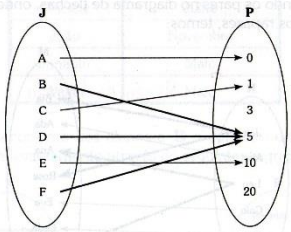
Exemplo 1

Numa competição de arco e flecha, onde a pontuação está esquematizada no alvo, como mostra a figura a seguir, seis participantes numa primeira jogada, lançando somente uma flecha cada um, obtiveram os seguintes resultados:

Jogador	Pontos Obtidos
A	0
B	5
C	1
D	5
E	10
F	5



Sendo **J** o conjunto dos jogadores e **P** o conjunto da pontuação, através do diagrama de flechas temos:



Note que:

1º) Todo jogador atirou.

2º) Atirou uma vez só.

Como esta relação satisfaz as duas condições acima, ela é uma **função** de **J** em **P.**

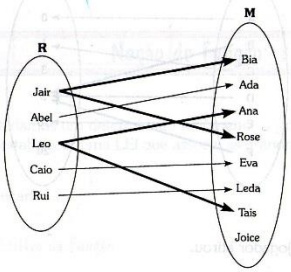
Para que uma relação seja **função**, devemos fazer duas perguntas para o conjunto de partida das flechas:

1ª) Todo mundo atira ?

2ª) Atira uma vez só ?

Exemplo 2

Levantando informações *confidenciais* sobre namoro numa sala de aula e representando os pares no diagrama de flechas, onde **M** é o conjunto das moças e **R** dos rapazes, temos:



Vamos verificar se essa relação satisfaz as duas condições:

1ª) Todo rapaz possui namorada?

Sim, "então todo mundo atira".

2ª) Essa namorada é única?

Não, "então não atira uma vez só".

Vamos esclarecer (*mas só matematicamente*).

Jair namora Bia e Rose, Leo namora Ana e Taís.

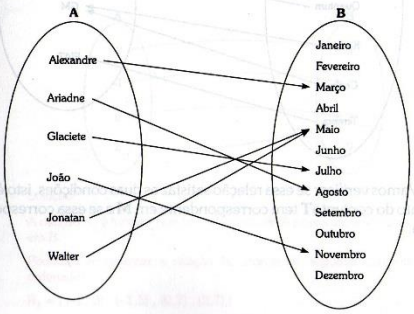
Logo essa relação (*até agora mantida em sigilo*) **não é uma função** de **R** em **M**.

Exemplo 3

Num levantamento feito com alguns alunos, sobre o mês de nascimento, obtivemos o seguinte resultado:

Alunos	Mês do Nascimento
Alexandre	Março
Ariadne	Agosto
Glaciete	Julho
João	Novembro
Jonatan	Maio
Walter	Maio

Sendo **A** o conjunto dos alunos e **B** o conjunto dos meses, vamos esquematizar este levantamento através do seguinte diagrama de flechas:



Note que:

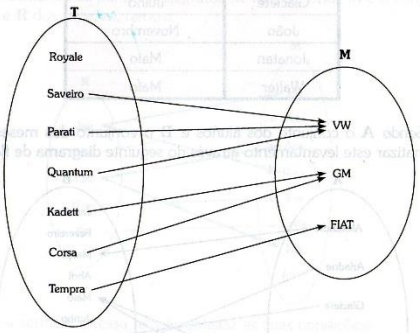
1º) não existe nenhum elemento do conjunto **A** que não tem correspondente em **B** (*pois todo mundo nasceu*).

2º) não existe nenhum elemento em **A** com mais de um correspondente em **B** (*ora, ninguém nasceu em dois meses diferentes*).

Dizemos então que uma relação desse tipo representa uma **função** de **A** em **B**.

Exemplo 4

Relacionemos alguns tipos de carros e algumas marcas, onde **T** o conjunto dos tipos e **M** o conjunto das marcas, no seguinte diagrama:



Vamos verificar se essa relação satisfaz as duas condições, isto é, se todo elemento do conjunto **T** tem correspondente em **M** e se essa correspondência é única.

Note que:

1º) existe elemento em **T** que não possui correspondente em **M.**

Já que a primeira condição não foi satisfeita, não precisamos verificar a segunda para afirmar que essa relação **não é uma função** de **T** em **M**.

DEFINIÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação de A em B é função se cada elemento x de A possui um único correspondente y em B.

De acordo com este conceito, devemos ter duas condições:

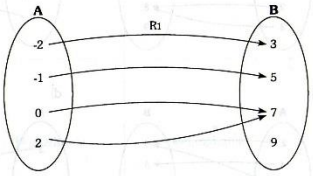
1ª) Todo elemento x de A tem correspondente y em B, e

2ª) Cada elemento x de A tem um único correspondente y em B

Exercícios

15. Quais das seguintes relações são funções de A em B?

a)



Solução:

A relação R_1 é função, pois todo elemento de A possui um único correspondente em B.

Podemos representar a relação R_1 através do seguinte conjunto de pares ordenados:

$R_1 = \{(-2, 3), (-1,5), (0,7), (2,7)\}$

b) $R_2 = \{(1,6), (2,7), (3,9)\}$ onde $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{5,6,7,9\}$

Solução:

A relação R_2 não é função, pois o elemento 4 de A não possui correspondente em B.

c) $R_3 = \{(2,4), (2,5), (2,7), (3,4), (3,5), (3,7)\}$ onde $A = \{2,3\}$ e $B = \{4,5,7\}$

Solução:

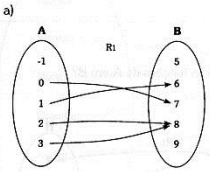
A relação R_3 não é função, pois existem elementos de A que possuem mais de um correspondente em B.

OBSERVAÇÃO

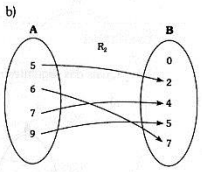
A relação R_3 chama-se **produto cartesiano** de A por B e indica-se: AxB, onde são representados todos os pares possíveis, sendo o primeiro elemento de A e o segundo de B.

16. Quais das seguintes relações são funções de A em B?

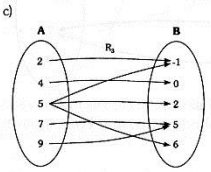
a)



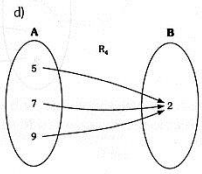
b)



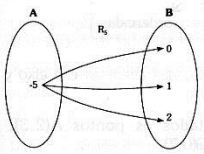
c)



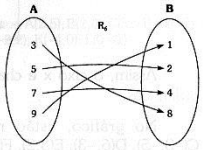
d)



e)

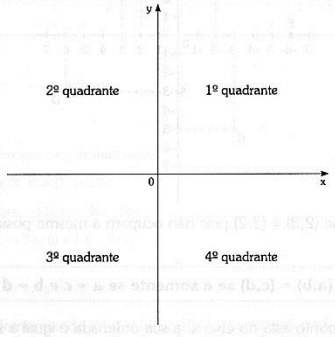


f)



Sistema Cartesiano Ortogonal

Podemos representar os *pares ordenados* de números reais no sistema cartesiano ortogonal, criado pelo filósofo e iluminista francês ***René Descartes (1596–1650)*** que fixou a base de seu trabalho em dois eixos perpendiculares, introduzindo a noção de coordenadas. Este sistema divide o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**, conforme mostra a figura:



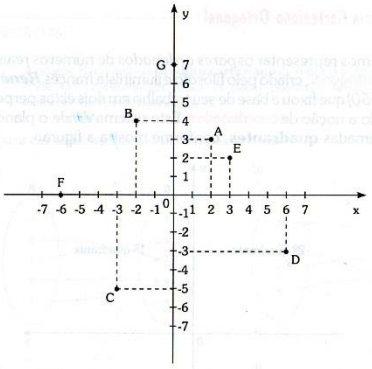
O ponto de interseção dos eixos é a origem do sistema, representado pelo ponto O na figura.

O par ordenado (x, y), onde x e y são números reais e representam as coordenadas do ponto, sendo x a abscissa e y a ordenada desse ponto.

A (x, y)
abscissa ordenada

Assim, o eixo x é chamado eixo das abscissas e o eixo y eixo das ordenadas.

No gráfico, estão representados os pontos A(2,3), B(–2,4), C(–3,–5), D(6,–3), E(3,2), F(–6,0) e G(0,7).



Note que (2,3) ≠ (3,2) pois não ocupam a mesma posição no plano. Então:

(a,b) = (c,d) se e somente se a = c e b = d

Se um ponto está no eixo x, a sua ordenada é igual a zero, então as coordenadas são da forma (x ,0).

Se um ponto está no eixo y, a sua abscissa é igual a zero, então as coordenadas são da forma (0, y).

Exercícios

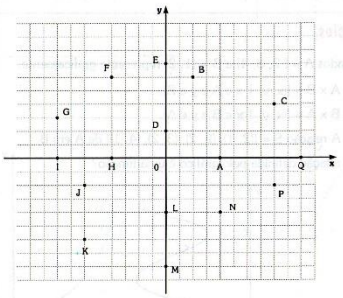
17. Localize no plano cartesiano, os seguintes pontos: A(2,5); B(2,0); C(3,–1); D(0,2); E(4,–3); F(–3,–4); G(1,3); H(3,1); I(–4,3); J(–2,2); K(–4,0); L(0,–2).

18. Indique em que quadrante está cada ponto.

a) A (2, 5) b) B (–3, 4)

c) C (2, –1) d) D (–1, –1)

19. Dê as coordenadas dos pontos da figura.



20. Determine x e y de modo que:

a) (x–3, 8) = (7, y+2)

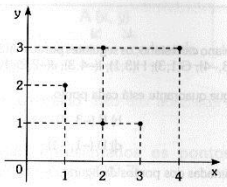
b) (x+y, –11) = (7, 2x – 3y)

c) (x^2 – 5x, 5) = (–6, y^2+1)

Gráfico de uma Relação

Se os elementos de uma relação R são pares ordenados de números reais, o conjunto dos pontos do plano cartesiano associado a estes pares chama-se **gráfico** de R.

A relação R = {(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 3)} de A = {1, 2, 3, 4} em B = {1, 2, 3} tem o seguinte gráfico:



Exercícios

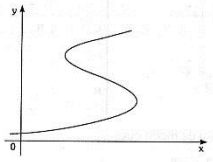
21. Dados A = { 2, 3, 4} e B = {1, 2} represente graficamente:

a) A x B = {(x, y) / x ∈ A e y ∈ B}.

b) B x A = {(x, y) / x ∈ B e y ∈ A}.

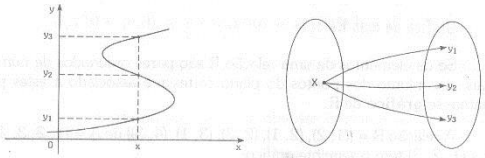
c) A relação S = {(2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1)} de A em B.

22. A relação definida pelo gráfico é uma função?



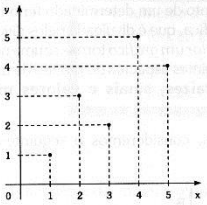
Solução:

Não é função, pois existe, por exemplo, x que possui três correspondentes: y_1, y_2 e y_3.

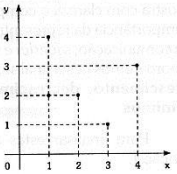


23. Quais relações definidas pelos gráficos abaixo são funções:

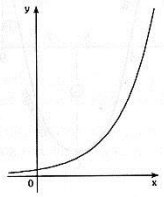
a)



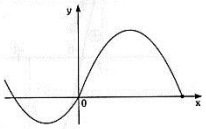
b)



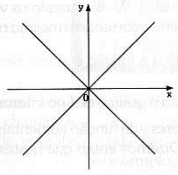
c)



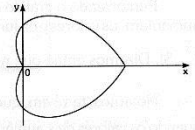
d)



e)



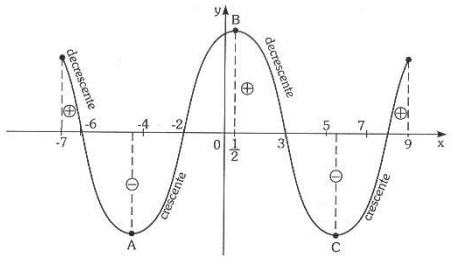
f)



Análise de Gráficos

As representações gráficas são uma fonte de informações que nos mostra com clareza o comportamento de um determinado fenômeno. Dada a importância da representação gráfica, que é divulgada pelos diversos meios de comunicação, saber *ler e interpretar um gráfico* torna-se uma necessidade. Abordaremos nesta análise, os seguintes aspectos do gráfico de uma função: **crescimento, decrescimento, raízes, sinais e valores máximos e mínimos**.

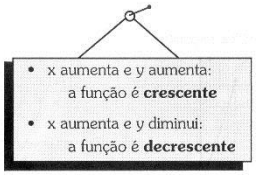
Para analisar estes aspectos, consideremos o seguinte gráfico da função f.



Crescimento e Decrescimento de uma Função

Percorrendo o gráfico de f no intervalo [–7,–4], quando os valores de x aumentam, os valores y da função diminuem, ocorrendo o mesmo no intervalo $[\frac{1}{2},5]$. Dizemos então que nestes intervalos a função é decrescente.

Notamos, também, que percorrendo o gráfico de f no intervalo $[-4,\frac{1}{2}]$, quando os valores de x aumentam, os valores y da função aumentam também, ocorrendo o mesmo no intervalo [5,8]. Dizemos então que nestes intervalos a função é crescente.



Raiz ou Zero de uma Função

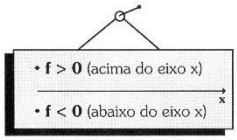
São as abscissas dos pontos onde o gráfico da função corta o eixo x. Como esses pontos possuem ordenadas nulas, a raiz também é chamada de zero da função.

No exemplo, –6, –2, 3 e 7 são raízes ou zeros da função f.

Sinal de uma Função

Nos intervalos [–7, –6 [,] –2,3 [e] 7, 8], o gráfico de f está acima do eixo x e portanto a função é positiva ($f > 0$).

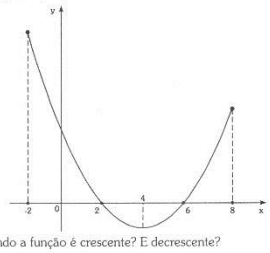
Nos intervalos] –6, –2 [e] 3, 7 [, o gráfico de f está abaixo do eixo x e portanto a função é negativa ($f < 0$).



O ponto onde o gráfico de uma função muda de *decrescente para crescente* chama-se mínimo relativo de f, no exemplo os pontos A e C. O ponto onde o gráfico muda de *crescente para decrescente* chama-se máximo relativo de f. No exemplo, o ponto B.

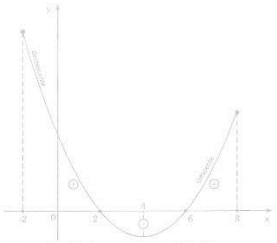
Exercícios

24. Dado o gráfico, responda:



a) Quando a função é crescente? E decrescente?
b) Quais são as raízes da função?
c) Quando a função é positiva? E negativa?

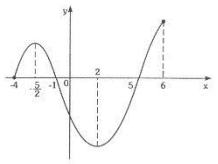
Solução:



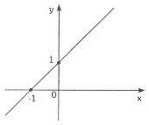
a) Crescente em [4, 8], decrescente em [–2, 4].
b) 2 e 6.
c) Positiva em [–2, 2[e]6, 8], e negativa em]2, 6[.

25. Para cada gráfico a seguir, responda:
a) Quando a função é crescente? E decrescente?
b) Quais são as raízes da função?
c) Quando a função é positiva? E negativa?

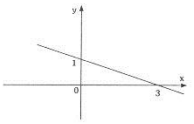
I)



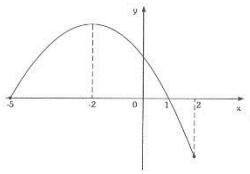
II)



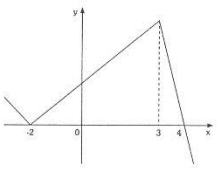
III)



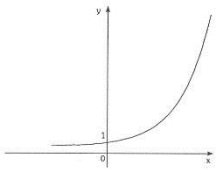
IV)



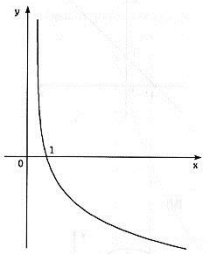
V)



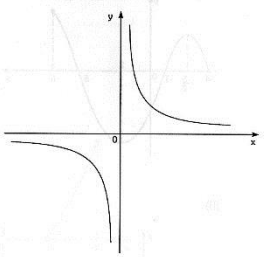
VI)



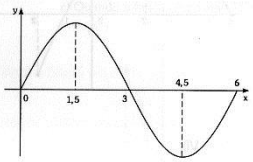
VII)



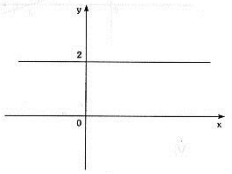
VIII)



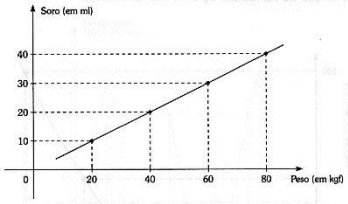
IX)



X)



26. O gráfico representa a quantidade de soro que uma pessoa deve tomar, em função do seu peso, num determinado tratamento médico.

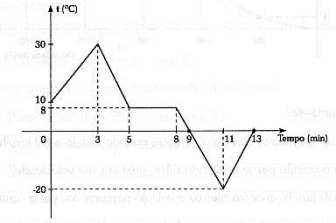


a) Quanto deve tomar de soro uma pessoa com peso 40 kgf?

b) Se uma pessoa tomou 30 ml de soro, qual é o seu peso?

c) A quantidade de soro a ser tomada deve ser dividida em 10 injeções. Quantos ml de soro deve tomar em cada injeção, uma pessoa de 80 kgf de peso?

27. A variação de temperatura de uma substância em função do tempo está abaixo representada.



a) Qual a temperatura máxima atingida pela substância?

b) Após quanto tempo a substância atinge a mínima temperatura?

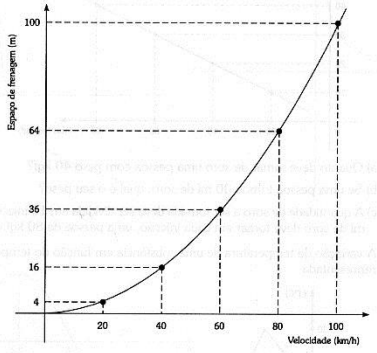
c) Em que instante a substância está a 0 °C?

d) Quando a temperatura é positiva? E negativa?

e) Quando a substância é aquecida? E resfriada?

f) Durante quanto tempo a temperatura se manteve constante? Qual foi esta temperatura?

28. O espaço de frenagem de um veículo é a distância percorrida até parar, desde o início em que o freio foi acionado. Abaixo, temos o gráfico do espaço de frenagem em função da velocidade de um certo automóvel.



Pergunta-se:

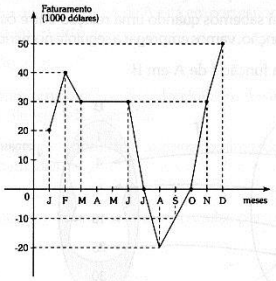
a) Quantos metros o veículo percorre quando freado a 80 km/h?

b) Se o veículo parou utilizando 64m, qual era sua velocidade?

c) A 60 km/h, quantos metros o veículo percorre até parar, quando freado?

d) Qual o aumento do espaço de frenagem, se aumentarmos a velocidade do veículo de 40 km/h para 60 km/h?

29. O gráfico mostra o faturamento de uma Empresa durante o ano de 1995.



Pergunta-se:

a) Quando foi o maior lucro?

b) Quando foi o menor faturamento?

c) Em que mês a empresa faturou 40.000 dólares?

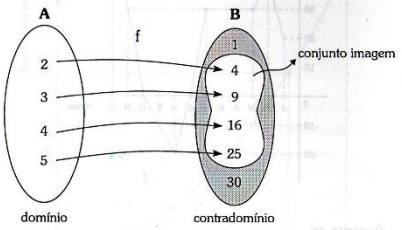
d) Quando não houve lucro nem prejuízo?

e) Qual o faturamento da Empresa em 1995?

2.3 Notação de Função

Agora que já sabemos quando uma relação entre os elementos de dois conjuntos é uma função, vamos empregar a seguinte nomenclatura e linguagem.

Considere a função f de A em B:



- O conjunto **A** é chamado domínio e o conjunto **B** contradomínio de f. Indicaremos o domínio por **D** e cada um de seus elementos por x.

  Do exemplo, temos:

  D = {2, 3, 4, 5} e B = {1, 4, 9, 16, 25, 30}

- O subconjunto de B formado por elementos "*que foram fechados*" é chamado conjunto imagem de f. Indicamos o conjunto imagem por Im e cada um de seus elementos por y ou f(x).

  Do exemplo, Im = {4, 9, 16, 25}.

  É importante destacar que:

  Para x = 2, temos y = 4, ou a imagem de 2 é 4, isto é, f(2) = 4;

  Para x =3, temos y = 9, ou a imagem de 3 é 9, isto é, f(3) = 9.

  Para x = 4, temos y = 16, ou a imagem de 4 é 16, isto é, f(4) = 16; e

  Para x = 5, temos y = 25, ou a imagem de 5 é 25, isto é, f(5) = 25.

OBSERVAÇÕES

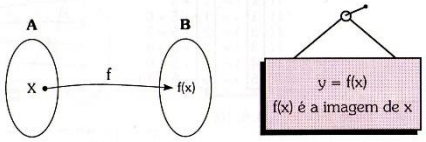
1. Geralmente, as funções são dadas por *expressões analíticas*. Do exemplo, cada elemento x de A está em correspondência com o seu quadrado em B, isto é:

   $y = x^2$ ou $f(x) = x^2$

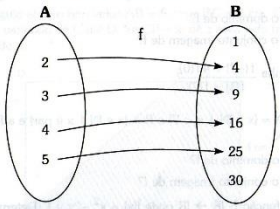
2. Indicaremos uma função f com domínio em A e imagens em B por $f: A \to B$ (lê-se: f de A em B).

3. As funções onde o domínio e o contradomínio são subconjuntos de IR são chamadas funções reais de variáveis reais, ou simplesmente funções reais

4. As funções geralmente são representadas por f(x), g(x), h(x), etc.



5. Na função y = f(x), x também é chamado de variável independente e y ou f(x) de variável dependente



Exercícios

30. Dado A = {1, 2, 3, 4, 5} e a função f : A→IR , onde f(x) = x + 5. Pergunta-se:

    a) Qual o domínio de f?

    b) Qual o conjunto imagem de f?

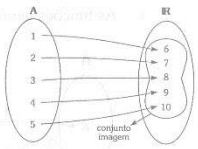
    c) Obtenha $\dfrac{f(1) - 2f(3)}{3f(5)}$

    Solução:

    a) D = {1, 2, 3, 4, 5} = A

    b) Temos:

    $f(1) = 1 + 5 = 6$
    $f(2) = 2 + 5 = 7$
    $f(3) = 3 + 5 = 8$
    $f(4) = 4 + 5 = 9$
    $f(5) = 5 + 5 = 10$



    Então: Im = {6, 7, 8, 9, 10}

    c) $\dfrac{f(1) - 2f(3)}{3f(5)} = \dfrac{6 - 2.8}{3.10} = -\dfrac{10}{30} = -\dfrac{1}{3}$

31. Dado A={ −2, 0, 1, 2, 7} e a função f: A→IR onde f(x)=2x−1, pergunta-se:

    a) Qual o domínio de f?

    b) Qual o conjunto imagem de f?

    c) Obtenha $\dfrac{f(-2) + 4f(0)}{f(1) - f(7)}$

32. Dados A = {x ∈ IN | x < 7} e B = {x ∈ IN | x é par} e a função f : A→B, onde f(x) = 2x

    a) Qual o domínio de f?

    b) Qual o conjunto imagem de f?

33. Seja a função f: IR → IR onde $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Determine:

    a) f(−2) b) f(5) c) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ d) $f(\sqrt{2})$

34. Seja a função g: IR → IR onde $g(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$, calcule $g(\sqrt{2} + 1)$.

35. Obtenha o elemento do domínio da função f: IR → IR, onde $f(x) = \dfrac{2x + 1}{5}$, cuj imagem é igual a 3.

    Solução:

    Devemos encontrar x no domínio da função f onde f(x) = 3

    $\dfrac{2x + 1}{5} = 3$

    $2x + 1 = 15$

    $2x = 14$

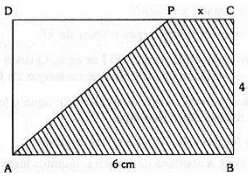
    $x = 7$

    Então 7 é o elemento do domínio f que possui imagem 3.

    Vamos verificar: $f(7) = \dfrac{2.7 + 1}{5} = 3$

36. A função $g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ possui o conjunto imagem {−2, −1, 0, 2, 4, 7}. Qual domínio de g?

37. O retângulo abaixo tem lados AB = 6 cm e BC = 4 cm. Considere um ponto em CD, variando de C até D. Se CP = x, dê a área y do trapézio hachurado er função de x.



Solução:

Área do trapézio é dada por: $\frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$

Assim:

$y = \frac{(6 + x)}{2} \cdot 4$

$y = (6 + x)\,2$

$y = 2x + 12$

38. Considerando o resultado do exercício anterior, responda:

a) Qual a área do trapézio quando x = 2 cm?

b) Qual a área do trapézio quando P é médio de $\overline{CD}$?

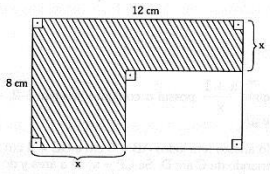
c) Quanto vale x para uma área de $20cm^2$?

d) Se CP é igual a 25% de CD, qual a área do trapézio?

e) Quanto vale x, para que a área hachurada seja metade da área do retângulo?

f) Se aumentarmos x em uma unidade, o que ocorre com y?

39. Na figura, a área y da região hachurada é função de x. Determine:



a) A expressão analítica dessa função.

b) Qual a área quando x = 3cm?

c) Quando a área for $64cm^2$, qual o valor de x?

40. Um tanque tem capacidade para 2000 ℓ de água. Quando o tanque está com 100 ℓ de água, abre-se uma torneira que despeja no tanque 25 ℓ por minuto. Pede-se:

a) A expressão que relaciona a quantidade de água y (em litros) no tanque em função do tempo x (em minutos).

b) Em quanto tempo esta torneira enche o tanque?

c) Uma hora após a abertura da torneira, quantos litros temos no tanque?

d) Quanto tempo essa torneira demora para encher metade do tanque?

41. Sendo a função f: IR → IR onde f(x) = ax + b. Calcule **a** e **b**, sabendo qu f(5) = 13 e f(–2) + 1 = 0.

42. Dadas as funções **reais** f(x) = 2x –1 e g(x) = x^2 + 3. Calcule:

a) g(3) – f(2) b) f(g(5)) c) g(f(4))

d) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$ e) $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$

43. Uma função f: A → B é **par** se, para cada a ∈ A, tem-se **f(a) = f(–a)**. Mostr que a função f(x) = x^2 + 2 é par.

Solução:

$f(a) = a^2 + 2$

$f(-a) = (-a)^2 + 2 = a^2 + 2$

como f(a) = f(–a), então f é par

44. Uma função f = A → B é **ímpar** se, para cada a ∈ A, tem-se: **f(–a) = –f(a** Mostre que a função f(x) = x^3 é ímpar.

Solução:

$f(a) = a^3$

$f(-a) = (-a)^3 = -a^3 = -f(a)$

como f(–a) = –f(a), então f é ímpar

45. Verifique se cada função é par ou ímpar.

a) f(x) = x^2 –1 b) f(x) = x c) g(x) = $\frac{1}{x}$

d) g(x) = 2x +3 e) h(x) = x^4 +1 f) h(x) = 2^x

Determinação do Domínio de uma Função

É comum mencionarmos a expressão analítica de uma função ser fornecer o seu domínio e contradomínio.

Nestes casos, convenciona-se que:

- o contradomínio é o conjunto dos números reais (IR).
- o domínio é o conjunto de todos os números reais para os qua as operações indicadas na expressão analítica da função sejar possíveis em IR.

De modo mais simples:

Determinar o domínio de uma função é obter o conjunto de todos os valores de x para que a função exista.

Exemplos

1º) O domínio da função f(x) = x^2 é IR, pois todo número real pode ser elevado ao quadrado.

2º) O domínio da função g(x) = $\sqrt{x}$ é IR_+, pois só podemos extrair a raiz quadrada de um número real não negativo.

3º) O domínio da função h(x) = $\frac{1}{x}$ é IR^*, pois não existe divisão por zero.

4º) O domínio da função f(x) = $\sqrt[3]{x-1}$ é IR, pois podemos extrair raiz cúbica de qualquer número real.

Lembretes:

- Não existe divisão por zero.
- Só existe raiz de índice par de número real não negativo.
- Sempre existe a raiz de índice ímpar de qualquer número real.

Exercícios

46. Determine o domínio das funções:

a) f(x) = 2x + 3 b) f(x) = x^2 + 5x + 6

c) f(x) = $\sqrt{1-x}$ d) g(x) = $\sqrt[3]{x-3x^2}$

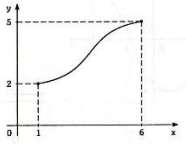
e) g(x) = $\frac{1}{2x+4}$ f) g(x) = $\frac{x+5}{x-1}$

g) h(x) = $\frac{x}{\sqrt[4]{2x-6}}$ h) h(x) = $\frac{-2}{\sqrt[3]{2-6x}}$

i) f(x) = $\sqrt{x} + \sqrt{x-2}$ j) f(x) = $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$

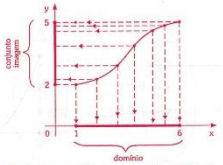
k) g(x) = $\frac{1}{x^2-4} + \frac{2x}{1+x^2}$ l) h(x) = $\frac{x}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2-4}$

47. Dê o domínio e o conjunto imagem da função representada no seguinte gráfico



Solução:

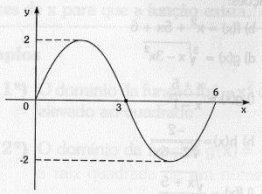
Determinamos o domínio da função, observando as abscissas dos pontos do ser gráfico e o conjunto imagem, observando as ordenadas dos pontos.



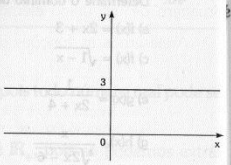
D = {x ∈ R | 1 ≤ x ≤ 6} e Im = {y ∈ R | 2 ≤ y ≤ 5}

48. Dê o domínio e a imagem da função representada nos seguintes gráficos.

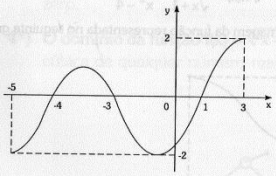
a)



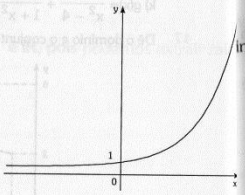
b)



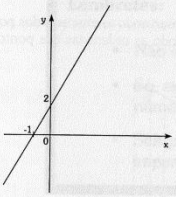
c)



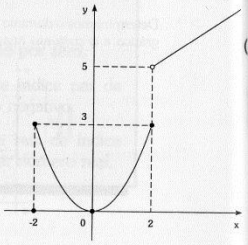
d)



e)



f)

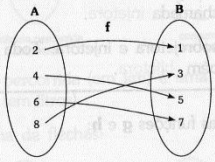


Função Bijetora

Uma função é chamada bijetora se cada elemento do contradomínio é imagem de um único elemento do seu domínio.

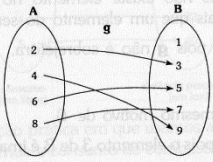
Analisemos as funções de **A** em **B** nos seguintes esquemas:

1º)



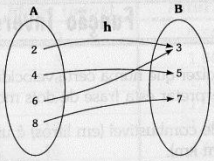
A função **f** é bijetora, pois cada elemento do contradomínio **B** é imagem de um único elemento do domínio **A**.

2º)



A função **g** não é bijetora, pois existe elemento no contradomínio **B** (o número 1) que *não é imagem* de nenhum elemento do domínio **A**.

3º)



A função **h** não é bijetora, pois existe elemento no contradomínio **B** que é imagem de dois elementos do domínio **A** (3 é imagem de 2 e 6).

OBSERVAÇÕES

- O contradomínio e o conjunto imagem da função **f** são iguais. Função onde isto ocorre é chamada sobrejetora.
- Nas funções **f** e **g**, não existe elemento do contradomínio que é imagem de mais que um elemento do seu domínio. Função onde isto ocorre é chamada injetora.
- A função **f** é sobrejetora e injetora. Toda função sobrejetora e injetora é também bijetora.

Vamos classificar as funções **g** e **h**:

Função **g**:

- não é sobrejetora, pois o contradomínio é diferente do conjunto imagem.
- é injetora, pois não existe elemento no contradomínio que é imagem de mais que um elemento do seu domínio.
- não é bijetora, pois **g** não é sobrejetora.

Função **h**:

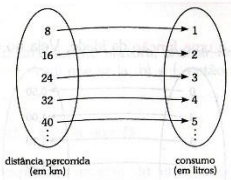
- é sobrejetora (mesmo motivo de **f**).
- não é injetora, pois o elemento 3 de B é imagem de dois elementos de A (2 e 6).
- não é bijetora, pois **h** não é injetora.

2.4 Função Inversa

Quando ouvimos dizer que numa certa velocidade um carro "faz 8km por litro", podemos interpretar esta frase de dois modos:

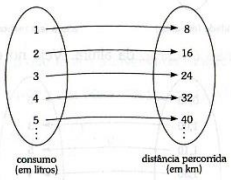
1º) O consumo de combustível (em litros) é uma função da distância percorrida (em km).

Veja no diagrama de flechas:



2º) A distância percorrida (em km) é uma função do consumo de combustível (em litros).

Veja no diagrama de flechas:



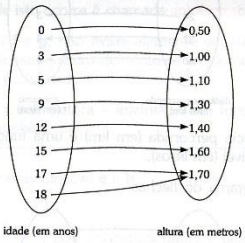
Esta é uma situação prática em que usamos a inversa de uma função, onde a distância percorrida e consumo de combustível são funções inversas.

Note que nem sempre existe a inversa de uma função. Na tabela temos a altura de uma certa pessoa em função da idade.

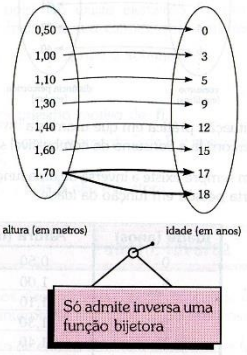
Idade (anos)	Altura (m)
0	0,50
3	1,00
5	1,10
9	1,30
12	1,40
15	1,60
17	1,70
18	1,70

Então:

1º) A altura é uma função da idade. Veja no diagrama de flechas.



2º) A idade não é função da altura. Veja no diagrama de flechas.



Indica-se a inversa da função f(x) por $\mathbf{f^{-1}(x)}$

DEFINIÇÃO

Sendo f: A → B uma função bijetora, chama-se função inversa de f, a função f^{-1}: B → A tal que se (a, b) ∈ f, então (b, a) ∈ f^{-1}.

Regra para Obter a Função Inversa

Para obter a expressão inversa de uma função, procedemos d seguinte modo:

1º) trocamos x por y e y por x,

2º) isolamos y.

Exemplo 1

Ache a expressão que indica a inversa da função f(x)=2x+1.

1º) Trocando x por y e y por x em y=2x+1, temos x=2y+1.

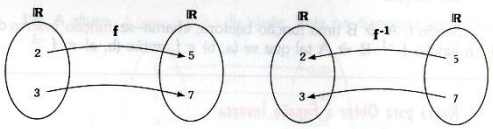
2º) Isolando y, vem: $\frac{x-1}{2} = y$.

Então, a expressão da inversa de f é $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Note que:

- (2, 5) ∈ f, pois f (2) = 2 . 2 + 1 = 5
- (5,2) ∈ f^{-1}, pois $f^{-1}(5) = \frac{5-1}{2} = 2$
- (3, 7) ∈ f, pois f(3) = 2.3+1=7
- (7, 3) ∈ f^{-1}, pois $f^{-1}(7) = \frac{7-1}{2} = 3$

Esquematicamente, temos:



Exemplo 2

Ache a expressão que indica a inversa da função $f(x) = \frac{x-3}{2x+4}$, para $x \neq -2$.

1º) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{y-3}{2y+4}$$

2º) Isolando y, vem:

$$x(2y+4) = y - 3$$

$$2xy + 4x = y - 3$$

$$2xy - y = -4x - 3$$

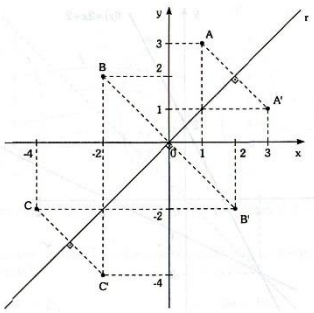
$$y(2x-1) = -4x-3$$

$$y = \frac{-4x-3}{2x-1} = \frac{4x+3}{1-2x}$$

Então a expressão da inversa da f é: $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{1-2x}$

Gráfico de uma Função Inversa

Consideremos no sistema cartesiano, a bissetriz do 1º e 3º quadrantes (reta r) e marquemos os pontos : A(1,3); A' (3,1); B(–2,2); B' (2,–2); C (–4,–2) e C'(–2,–4).



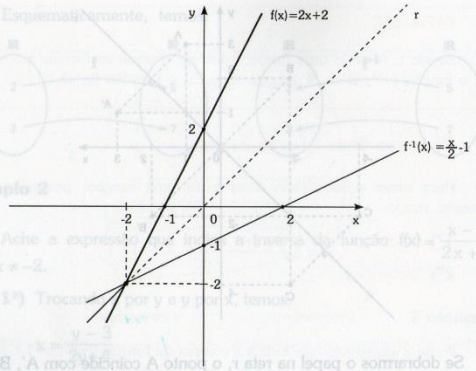
Se dobrarmos o papel na reta r, o ponto A coincide com A', B com B' e C com C' . Então dizemos que os pontos A,B e C são simétricos, respectivamente a A', B' e C' em relação à reta r.

Temos assim a seguinte conclusão:

O gráfico de uma função e de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Exemplo

Vamos construir num mesmo sistema cartesiano, o gráfico da função f(x)=2x+2 e de sua inversa, $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$.



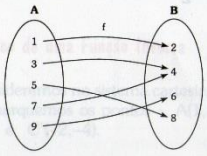
x	f(x)
-1	0
0	2

x	$f^{-1}(x)$
0	-1
2	0

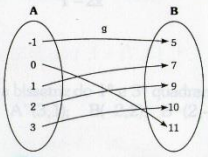
Exercícios

49. Verifique quais dos diagramas das funções de **A** em **B** são bijetoras.

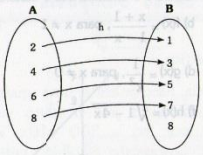
a)



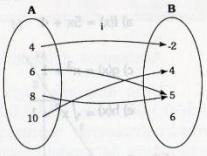
b)



c)



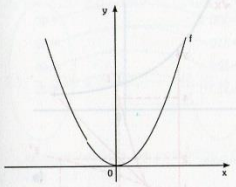
d)



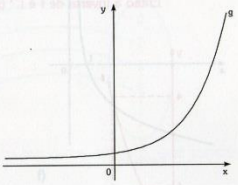
50. Quais funções do exercício anterior são sobrejetoras? E injetoras?

51. Considere as funções cujos gráficos estão abaixo representados. Quais são bijetoras?

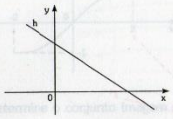
a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$



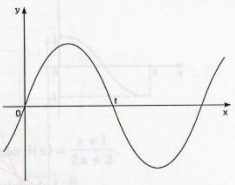
b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$



c) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



d) t: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



52. Ache a expressão que indica a inversa das seguintes funções:

a) $f(x) = 5x + 4$

b) $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$

c) $g(x) = x^3 + 1$

d) $g(x) = \frac{1}{x^2}$, para $x \neq 0$

e) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $h(x) = \sqrt[3]{1 - 4x}$

53. Seja a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$. Faça num mesmo sistema cartesiano, os gráficos de f(x) e $f^{-1}(x)$.

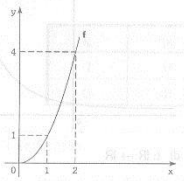
Solução:

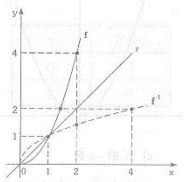
$y = x^2$

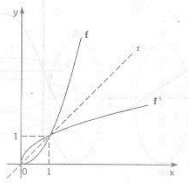
$x = y^2$

$y = \sqrt{x}$

Então a inversa de f é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

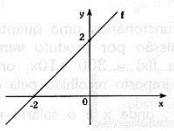




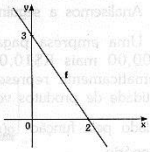


54. Construa o gráfico das inversas das funções dadas pelos gráficos abaixo, obtendo o seu domínio e o conjunto imagem.

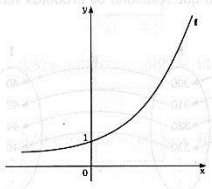
a)



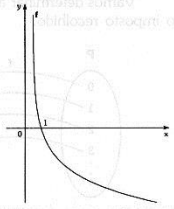
b)



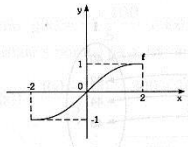
c)



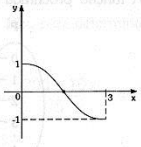
d)



e)



f)



55. Determine o conjunto imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$.

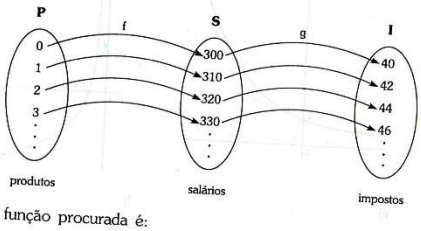
(dica: a conjunto imagem de f é o domínio de f^{-1}).

2.5 Função Composta

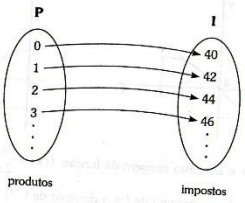
Analisemos a seguinte situação:

Uma empresa paga a seus funcionários uma quantia fixa de R$300,00 mais R$10,00 de comissão por produto vendido, que matematicamente representa-se por f(x) = 300 +10x, onde x é a quantidade de produtos vendidos. O imposto recolhido pela empresa é calculado pela função $g(x) = \frac{x-100}{5}$, onde x é o salário mensal do funcionário.

Vamos determinar a função que relaciona os produtos vendidos com o imposto recolhido.



A função procurada é:



Note que:

f(0) = 300 e g (300) = g(f(0)) = 40

300 = f(0)

Veja que 300 foi substituído por f(0).

f(1) = 310 e g (310) = g(f(1)) = 42

310 = f(1)

f(2) = 320 e g (320) = g(f(2)) = 44

320 = f(2)

f(3) = 330 e g (330) = g(f(3)) = 46

330 = f(3)

A lei que associa os produtos com os impostos é g(f(x)), que indica-se também por (gof)(x).

Como $g(x) = \frac{x - 100}{5}$ e f(x) = 300 + 10x, para determinar g(f(x)), basta substituir x por f(x) na g, isto é:

$$g(f(x)) = \frac{f(x) - 100}{5} = \frac{300 + 10x - 100}{5} = \frac{200 + 10x}{5} = 40 + 2x$$

$$\boxed{g(f(x)) = 40 + 2x}$$

Dessa forma, podemos obter o imposto recolhido em função dos produtos vendidos de uma maneira direta.

Assim:

g (f(0)) = 40 + 2.0 = 40

g (f(1)) = 40 + 2.1 = 42

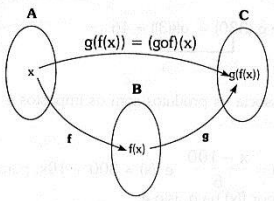
g (f(2)) = 40 + 2.2 = 44

g (f(3)) = 40 + 2.3 = 46

DEFINIÇÃO

Dadas as funções f: A → B e g: B → C, chama-se função composta de g e f, a função de A em C definida por g(f(x)), para todo x ∈ A.

Esquematicamente, temos:



Exercícios

56. Dadas as funções f(x) = 2x+1 e g(x) = x^2 – x, determine:

a) g(f(x)) b) (fog) (x)

Solução:

a) g(f(x))=[f(x)]^2 – f(x) = (2x+1)^2 – (2x+1) = 4x^2 +4x+1 – 2x – 1 = 4x^2 + 2x

b) (fog)(x) = f(g(x)) = 2.g (x) + 1 = 2 (x^2–x) +1 = 2x^2 – 2x + 1

57. Dadas as funções f(x) = 2x+1, g(x) = x–3 e h(x) = x^2, obtenha:

a) f(g(x)) b) (gof) (x)

c) h(f(x)) d) (foh) (x)

e) (fof) (x) f) f (g (h(x)))

g) g (h(2)) h) g (f(h(–1)))

58. Sendo f(x) = 2x+1 e g (x) = 3x – a, calcule a de modo que f(g(x)) = g (f(x)).

59. Obtenha o domínio da função f(g(x)), sendo:

$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$ e $g(x) = \frac{1}{x + 1}$

60. Sendo f(x) = 5x – 2 e f(g(x)) = 3x + 1, obtenha g(x).

61. Sendo as funções f(x) = x^2 – x + 1 e g (x) = 2x + m, calcule m, sabendo que f(g(–1)) = 1.

62. Sendo f(x) = 2x –1 e g (x) = 3x + 5, calcule x, tal que:

f (g(x)) + g (f(x)) – f (f(x)) = g (f(2))

63. Sabendo que f(x)=x–1 e $g(x) = \frac{1}{4 - 2x}$, calcule o domínio de $(gof)^{-1}$ (x).

64. Seja a função f(x) = x^2–1, calcule $(fof^{-1})(x)$.

65. Sendo $f(x) = \frac{x - 1}{3}$ e g(x) = 2x + 5, determine:

a) $(fog^{-1})(x)$ b) $(fog)^{-1}(x)$

66. Sendo f(x) = 2x +1 e g(x) = 4 – 3x, calcule x, sendo:

(gof)(x) + (fog)(x) = 0

Pense e Faça

F_6: Cada Ave no seu Galho

Marly diverte–se observando os passarinhos voando em torno de um arbusto. Ela notou que, quando uma ave fica em cada galho, uma das aves fica sem galho, quando ficam duas aves em cada galho, um dos galhos fica sem ave. Quantos galhos há no arbusto? E quantas aves?

F_7: Confusão Familiar

Somos pai, mãe, tio, tia, irmão, irmã, sobrinho, sobrinha e dois primos. Qual o menor número de pessoas que poderiam ter feito tal afirmação?

F_8: A vara no Ônibus (Sai da Frente)

Uma linha de ônibus não permite que os passageiros levem objetos maiores do que 4 metros. Um homem precisa viajar com sua vara de pesca de 5 metros. O que ele deve fazer para embarcar no ônibus com ela?

F_9: Barris Complicados

Numa adega, foram detectados dois barris com vazamento, sendo que ambos têm o mesmo diâmetro, mas um o dobro da altura do outro. Foi observado que ambos começaram a vazar ao mesmo tempo e que uma hora e quinze minutos após o início do vazamento, os dois barris estavam com a mesma quantidade de vinho. Ao fim de duas horas de vazamento, o maior barril estava totalmente vazio. Qual será o tempo necessário para que o menor barril fique totalmente vazio?

F_{10}: O Número "Exclamado"

Chama–se **fatorial** de um número natural n (n>1), o produto desses números de n até 1. Indica–se n!

Assim: $4! = 4.3.2.1 = 24$
$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040.$

Calcule:

a) $\frac{10!}{8!} - \frac{6!}{5!}$ b) $\sqrt{\frac{6!}{5}}$

3.1 - Exemplo Introdutório
3.2 - Gráfico da Função de 1º Grau
3.3 - Estudo do Sinal
3.4 - Inequações Produto e Quociente

Capítulo 3
Função do 1º Grau

3.1 Exemplo Introdutório

A pressão da água ao nível do mar é de 1 atmosfera. É sabido que a *pressão* aumenta com a profundidade em 0,1 atm por metro.

Vejamos a seguinte tabela:

Profundidade (m)	Pressão (atm)
0	1
2	0,1.2 + 1
4	0,1.4 + 1
6	0,1.6 + 1
8	0,1.8 + 1
10	0,1.10 +1
⋮	⋮

Sendo x a profundidade e y a pressão, temos a seguinte função:

$$y = 0,1x + 1$$

que é uma função de 1º grau.

DEFINIÇÃO

Uma função cuja expressão é da forma $y = ax + b$ onde a e b são números reais com $a \neq 0$ chama-se função do 1º grau.

São exemplos de funções do 1º grau:

- $f(x) = 2x + 3$ $(a = 2 \text{ e } b = 3)$
- $f(x) = -5x + 1$ $(a = -5 \text{ e } b = 1)$
- $f(x) = \frac{x}{3}$ $(a = \frac{1}{3} \text{ e } b = 0)$

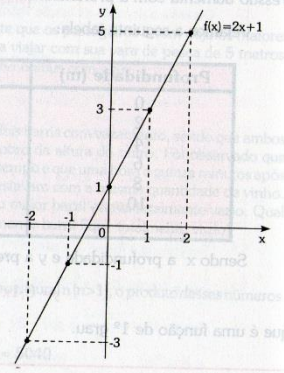
3.2 Gráfico da Função do 1º Grau

O gráfico de uma função é o conjunto de pontos (x, y) onde x são todos os valores do seu domínio e y suas respectivas imagens.

Vamos fazer o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Para isso, montamos a seguinte tabela para alguns valores atribuídos a x.

x	y = 2x + 1
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



Esse e outros exemplos de funções da forma y=ax + b têm como gráfico uma reta.

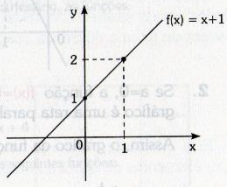
O gráfico da função y=ax+b é uma reta

Sendo o gráfico da função do 1º grau uma reta, precisamos apenas de dois de seus pontos para representá-la graficamente.

Veja os gráficos das seguintes funções:

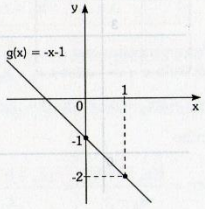
a) $f(x) = x + 1$

x	y=x+1
0	1
1	2



b) $g(x) = -x - 1$

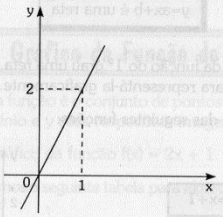
x	y=-x-1
0	-1
1	-2



OBSERVAÇÕES

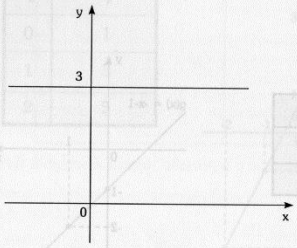
1. Se b=0, a função f(x)=ax é denominada função linear e seu gráfico é uma reta que passa pela origem.

Assim, o gráfico da função linear f(x) = 2x é:



2. Se a=0, a função f(x)=b é denominada função constante e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x.

Assim, o gráfico da função constante f(x)=3 é:



A função constante não é uma função do 1º grau

Exercícios

67. Considere as funções f(x) = 2x – 1 e g(x) = –2x + 1.

a) Determine o domínio e o conjunto imagem de f e g.

b) Em que ponto f corta o eixo x? E a função g?

c) Em que ponto f corta o eixo y? E a função g?

d) Represente num mesmo sistema cartesiano, as duas funções.

e) As funções f e g são iguais?

f) Qual o ponto de intersecção das duas funções?

68. Represente em um mesmo sistema cartesiano, as funções:

a) f(x) = x, g(x) = 2x e h(x) = $\frac{x}{2}$

b) f(x) = –x, g(x) = –2x e h(x) = $-\frac{x}{2}$

c) f(x) = 3x – 4, g(x) = 3x e h(x) = 3x + 4

69. Faça o gráfico e determine a raiz das seguintes funções:

a) f(x) = 3x + 2

b) f(x) = –2x + 3

c) g(x) = x – 7

d) g(x) = 2x + 1

e) h(x) = $\frac{x+3}{3}$

f) m(x) = $\frac{-3x+4}{2}$

Taxa de Variação Média (tvm)

Considere a função f(x) = 2x + 3. Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de f(x), temos a seguinte tabela:

x	f(x) = 2x + 3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7

Observe que quando x aumenta de uma unidade, y aumenta de duas unidades, sendo assim é constante a razão entre a diferença de dois valores quaisquer de f(x) e a diferença dos correspondentes valores de x, assim:

$$\frac{5-3}{1-0}=\frac{7-5}{2-1}=\frac{5-(-1)}{1-(-2)}=\ldots=2=\textbf{tvm}$$

Este quociente chama-se taxa de variação média (tvm), isto é, sendo x_1 e x_2 elementos do domínio de f(x), com $x_2 > x_1$, então:

$$\text{tvm}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ (x_1 \neq x_2)$$

Vamos mostrar que a taxa de variação média da função f(x) = ax + b é a. Atribuindo a x os valores x_1 e x_2, temos:

$f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$.

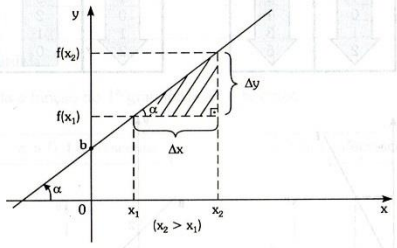
Então

$$\text{tvm}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{ax_2+b-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{ax_2+b-ax_1-b}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$$

tvm=a

a é chamado coeficiente angular da reta.

Graficamente, temos:



Note também que:

$$\text{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=a=\text{tvm}$$

A taxa de variação média fornece a tangente do ângulo que a reta for com o eixo x, marcado conforme a figura.

Para x=0, temos f(0) = a.0 + b, ou seja, f(0)=b, isto é, b nos indica or a reta corta o eixo y.

b é chamado de coeficiente linear da reta.

Como achar b? Resposta: faça x=0

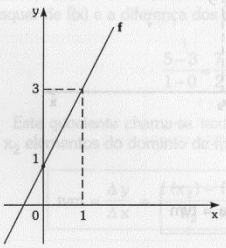
Crescimento e Decrescimento

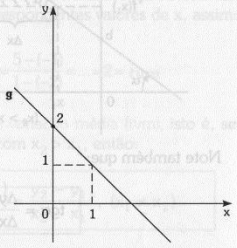
Analisemos as seguintes funções:

$f(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $g(x) = -x + 2$

x	f(x)=2x+1
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

x	g(x)=-x+2
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0





A função f é crescente, pois aumentando os valores de x, aumentam os correspondentes valores de y.

Sendo Δx e Δy positivos da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é maior que zero, como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, então:

A função $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$

A função g é decrescente, pois aumentando os valores de x, diminuem os correspondentes valores de y.

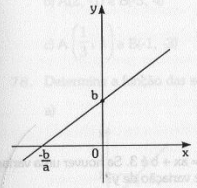
Sendo Δx positivo e Δy negativo, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é menor que zero, com $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, então:

A função $f(x) = ax + b$ é decrescente se $a < 0$

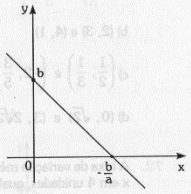
Resumindo:

Dada a função do 1º grau $f(x) = ax + b$, então:

$a > 0$, f é crescente



$a < 0$, f é decrescente



Exercícios

70. Qual a taxa de variação média das funções:

a) $f(x) = 8x + 3$

b) $f(x) = -x + 5$

c) $f(x) = \frac{-3x + 4}{2}$

d) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{6x - 1}{3}$

e) $f(x) = 3$

71. Qual o coeficiente angular das retas que passam pelos pontos:

a) (1,-1) e (3,5)

Solução:

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$

b) (2, 3) e (4, 1)

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(-2, \frac{3}{5}\right)$

d) $(0, \sqrt{2})$ e $(3, 2\sqrt{2})$

72. A taxa de variação média da função $f(x) = ax + b$ é 3. Se houver uma variação de x em 4 unidades, qual a correspondente variação de y?

Solução:

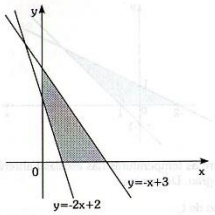
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$, como $\Delta x = 4$ então

$\frac{\Delta y}{4} = 3$, ou seja, $\Delta y = 12$

73. Dadas as funções $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = 6x - 3$. Obtenha graficamente o ponto de intersecção de f com g e dê suas coordenadas.

74. Determine a área do triângulo que a reta $y = 8x - 2$ forma com os eixos coordenados.

75. Calcule a área hachurada.



76. Dada a função $f(x) = ax + b$, com a, b ∈ IR e $a \neq 0$, determine a e b, sabendo-se que $f(1) = 4$ e $f(-1) = -2$.

77. Determine a função cuja reta passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

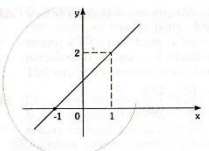
a) A(1, 7) e B(-2, -5)

b) A(2, -1) e B(-3, 4)

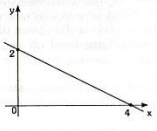
c) $A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e B(-1, -3)

78. Determine a função das seguintes retas:

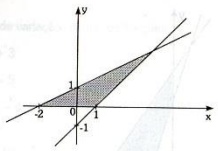
a)



b)



79. Calcule a área hachurada.



80. A relação entre as temperaturas nas escalas Fahrenheit (t_f) e Celsius (t_c) é uma função do 1º grau. Determine:

a) t_f em função de t_c.

b) Converta 50°F em Celsius.

c) Converta 75°C em Fahrenheit.

Lembrete: 0°C = 32°F e 100°C = 212°F

Solução:

a) Sendo t_f a temperatura na escala Fahrenheit e t_c a temperatura na escala Celsius, devemos obter uma expressão da forma y=ax+b. Fazendo $y = t_f$ e $x = t_c$, temos:

$$t_f = a.t_c + b$$

O problema estará solucionado quando obtivermos os valores de a e b. Conhecemos dois pontos da reta, que são (0,32) e (100, 212).

Temos:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

Como b é a ordenada do ponto onde a abscissa é zero, então b=32

abscissa
(0,32)
b

Logo: $t_f = \frac{9}{5} t_c + 32$

b) $t_f = \frac{9}{5} t_c + 32$

$50 = \frac{9}{5} t_c + 32$

$50 - 32 = \frac{9}{5} t_c$

$\frac{9}{5} t_c = 18$

$t_c = \frac{18 . 5}{9} = 10°C$

c) $t_f = \frac{9}{5} t_c + 32$

$t_f = \frac{9}{5} .75 + 32$

$t_f = 135 + 32$

$t_f = 167°F$

81. Numa cidade, a locadora de automóveis A cobra uma taxa diária de aluguel de R$ 80,00 mais R$2,00 por quilômetro rodado. Uma outra locadora B cobra R$200,00 a diária com quilometragem livre. Pede-se:

a) Num mesmo sistema cartesiano, os respectivos gráficos.

b) Em qual quilometragem rodada, o preço é igual nas duas locadoras?

c) Para fazer uma viagem de 50 km, que locadora é mais vantajosa?

d) Para uma viagem de 2 dias, fazendo 80 km num dia e 70 km no outro, que locadora você contrataria?

82. O herói de uma história em quadrinhos consegue fugir de uma armadilha preparada por seus inimigos, dirigindo um carro roubado a 80 km/h, estando seguro a 70 km do local da fuga. Passados 30 minutos de cochilo, os inimigos perceberam a fuga e alucinados vão à captura do herói num automóvel, a 150 km/h. Conseguirá nosso herói se salvar ou será tragicamente derrotado?

83. Um botijão de gás com 13 kg é comprado em um caminhão. Uma família com 5 pessoas gasta em média 0,43 kg de gás por dia. Qual vai ser a quantidade que restará no botijão após 20 dias?

Solução:

y: quantidade restante

a: taxa de variação= 0,43 kg, x: nº de dias e b = 13 kg

$y = b - ax$

$y = 13 - 0,43x$

$y = 13 - 0,43.20$

$y = 13 - 8,6$

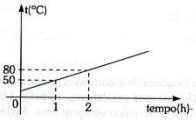
$y = 4,4$ kg

Logo, restará 4,4 kg

84. O número de unidades fabricadas (y) de um produto, durante um mês, é função do número de funcionários empregados (x), de acordo com a relação $y = 60x$. Sabendo que 30 funcionários estão empregados, calcule o aumento da produção mensal em unidades, se forem contratados mais 20 funcionários.

85. Qual a função que representa o valor a ser pago após um desconto de 20% sobre o valor x de uma mercadoria? Se um consumidor pagou R$1 600,00 nesta promoção, qual o valor normal da mercadoria?

86. Num forno a lenha, a variação da tempertura é dada pelo seguinte gráfico:



Determine:

a) A lei dessa função.

b) O instante em que a temperatura é 110°C.

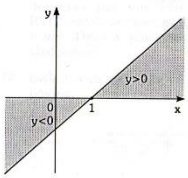
c) A temperatura ambiente do forno.

3.3 Estudo do Sinal

Estudar o sinal de uma função é verificar os valores de x que a torna positiva e os que a tornam negativa. Para isso devemos obter a raiz (ou o zero) da função, isto é, a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo x.

Exemplos

f(x) = x -1



a > 0, f é crescente

Raiz da Função:

x – 1 = 0

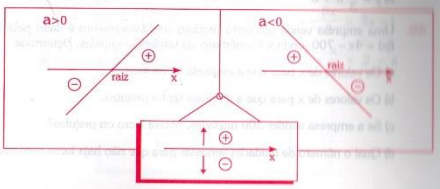
x = 1

Estudo do Sinal:

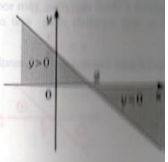
para x > 1, temos y > 0

para x < 1, temos y < 0

Esquematizando, temos:



f(x) = -x + 2



a < 0, f é decrescente

Raiz da Função:

-x + 2 = 0

x = 2

Estudo do Sinal:

para x > 2, temos y < 0

para x < 2, temos y > 0

Exercícios

87. Estude o sinal das funções

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 4$

Solução:

a) raiz da função:

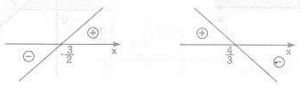
$2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

b) raiz da função:

$-3x + 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$



para $x > -\frac{3}{2}$, temos $y > 0$ para $x > \frac{4}{3}$, temos $y < 0$

para $x < -\frac{3}{2}$, temos $y < 0$ para $x < \frac{4}{3}$, temos $y > 0$

88. Estude o sinal das funções:

a) $y = \frac{2}{3}x + 5$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 7$ c) $y = -2x + 4$

d) $y = \frac{1}{3}x + 6$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = -x + 4$

89. Uma empresa vende um certo produto cujo faturamento é dado pela função $f(x) = 4x - 700$, onde x é o número de unidades vendidas. Determine:

a) Os valores de x para que a empresa tenha lucro.

b) Os valores de x para que a empresa tenha prejuízo.

c) Se a empresa vender 300 unidades, obterá lucro ou prejuízo?

d) Qual o número de unidades vendidas para que não haja lucro nem prejuízo?

90. Um freezer abaixa a temperatura uniformemente de 20°C para 10°C abaixo de zero em 3 horas. Sendo x o tempo em horas e y a temperatura em graus Celsius, determine:

a) Quando a temperatura atinge 0°C?

b) Quando a temperatura é positiva? E negativa?

c) Com 70 minutos de funcionamento, a temperatura atingida está acima ou abaixo de 0°C?

91. O Sr. Gastomário possui R$ 30 000,00 no banco, mas retira R$400,00 para despesas pessoais mensalmente. A Sra. Sekura Troko possui R$12 000,00 no banco e guarda R$200,00 por mês, num país onde a inflação é zero. Daqui a quanto tempo a Sra. Troko terá mais dinheiro que o Sr. Gastomário?

92. Dada a função $f(x) = -2x + 6$, determine os valores de x que tornam essa função positiva.

Solução:

Devemos ter $f(x) > 0$, então

$-2x + 6 > 0$

$-2x > -6$

$2x < 6$

$x < 3$,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

93. Resolva as seguintes inequações:

a) $2x + 4 < 0$ b) $-8x - 3 \geq 0$

c) $2x + 1 < 7x + 3$ d) $\frac{x+1}{3} \leq 1 - \frac{x}{2}$

e) $2(4 - x) < 1 - \frac{3x}{2}$ f) $5 - \frac{8x}{3} > 2x - 1$

g) $\frac{x+1}{2} + \frac{x}{2} + 1 < \frac{x+3}{4}$ h) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} < 2 - x$

3.4 Inequações: Produto e Quociente

São exemplos de inequações:

Produto	$(3x - 6)(2 - 4x) < 0$
Quociente	$\frac{x+3}{1-x} \geq 0$

Vamos resolvê-las:

1º) $\underbrace{(3x - 6)}_{f}\underbrace{(2 - 4x)}_{g} < 0$

Sinal de f:

$f(x) = 3x - 6$

$3x - 6 = 0$

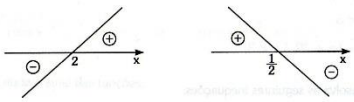
$x = 2$

Sinal de g:

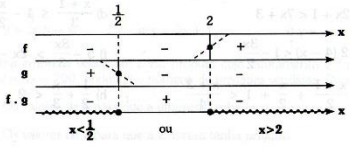
$g(x) = 2 - 4x$

$2 - 4x = 0$

$x = \frac{1}{2}$



Montando o "varal", temos:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2\}$

2º) $\frac{\overbrace{x+3}^{f}}{\underbrace{1-x}_{g}} \geq 0$

Sinal de f:

$f(x) = x + 3$

$x + 3 = 0$

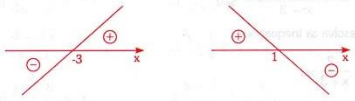
$x = -3$

Sinal de g:

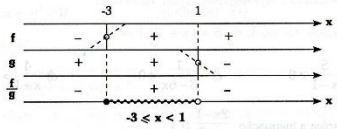
$g(x) = 1 - x$

$1 - x = 0$

$x = 1$

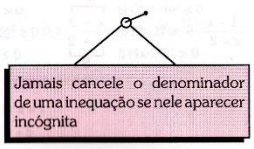


Vamos fazer o varal:



Note que 1 foi excluído da solução pois *anula o denominador*.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$



Exercícios

94. Resolva as inequações:

a) $(x + 3)(x - 2) > 0$

b) $(-x + 2)(-x + 6) < 0$

c) $(3x - 2)(-x + 7) \leq 0$

d) $(2x - 3)(x - 8) \geq 0$

e) $(x - 5)(2x + 12)(x - 6) \geq 0$

f) $x(x + 5) < 0$

g) $\frac{x + 1}{x - 2} \geq 0$

h) $\frac{(x+1)(x-2)}{x + 5} \leq 0$

i) $\frac{(-x + 1)(-x + 2)}{x - 3} \leq 0$

95. Resolva as inequações:

a) $\frac{-2}{x + 3} > 0$

Solução:

Como o numerador é negativo e a fração deve ser positiva, é necessário que o denominador seja negativo. Então, basta fazer:

$x+3<0 \Leftrightarrow x<-3 \Leftrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x<-3\}$

b) $\frac{5}{x-1} \geq 0$

c) $-\frac{1}{3-6x} < 0$

d) $\frac{4}{x+1} > 0$

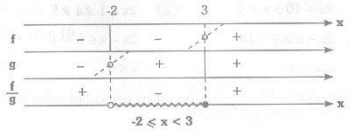
96. Resolva a inequação $\frac{2x-1}{x+2} \leq 1$

Solução:

$$\frac{2x-1}{x+2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-1(x+2)}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-x-2}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-3}{x+2}}_{f/g} \leq 0$$

Fazendo o varal temos:



$-2 \leq x < 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$

97. Resolva as inequações:

a) $\frac{x + 1}{4x - 3} \leq -1$

b) $\frac{5x + 3}{2x + 1} > 2$

c) $\frac{4 - 3x}{x - 1} \leq 3$

d) $\frac{x - 1}{x + 1} \geq 4$

e) $\frac{x^2 + 8}{4 + x} < x$

f) $\frac{x + 2}{x - 4} \geq \frac{x}{x + 1}$

98. Resolva as inequações:

a) $(x + 3)^4 \geq 0$

b) $(2x - 8)^7 < 0$

Solução:

a) Para qualquer x real $(x+3)^4$ é sempre maior ou igual a zero (potência de expoente par). Logo, $S = \mathbb{R}$.

b) Como temos uma potência de expoente ímpar e foi pedido um resultado negativo, então a base deve ser negativa, isto é:

$2x-8<0 \Rightarrow x<4$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

99. Resolva as inequações:

a) $(x - 1)^4 > 0$

b) $(2x - 6)^3 \geq 0$

c) $(3x + 12)^2 \geq 0$

d) $(2x-1)^6 < 0$

e) $(x+3)^{10} \leq 0$

f) $(4x-20)^7 > 0$

100. Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 10 > x + 7 \\ 2x - 1 \leq x + 5 \end{cases}$$

Solução:

① $2x + 10 > x + 7$

$2x - x > 7 - 10$

$x > -3$

② $2x - 1 \leq x + 5$

$2x - x \leq 5 + 1$

$x \leq 6$

Os valores de x devem satisfazer as duas inequações, então o conjunto solução é a intersecção das duas soluções.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 6\}$

101. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 2 < 0 \\ 5x + 1 > x - 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x - 1} < 0 \\ x + 3 \geq 2(1 - 4x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 1 \geq 2x + 5 \\ 3x - 2 > 1 - x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 3 \geq 2x + 5 \\ 3 > x + 2(2x - 1) \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 3(2 - x) \leq 10 \\ 3x - 5 < 4 + 7(3 - x) \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2(x - 7) - 3(x + 1) < 0 \\ \frac{x-1}{3} - \frac{2x + 5}{4} \geq \frac{1}{12} \end{cases}$

102. Resolva as seguintes *inequações simultâneas*:

a) $-1 < 2x + 7 \leq 13$

b) $1 < 3 - x < 10$

Solução:

Para resolver inequações do 1º grau deste tipo, basta isolar x na desigualdade. Assim:

a) $-1 < 2x + 7 \leq 13$ (somando -7)

$-1 - 7 < 2x + 7 - 7 \leq 13 - 7$

$-8 < 2x \leq 6$ (dividindo por 2)

$-\frac{8}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{6}{2}$

$-4 < x \leq 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 3\}$

b) $1 < 3 - x < 10$

$-3 + 1 < -3 + 3 - x < -3 + 10$

$-2 < -x < 7$ (multiplicando por -1)

$-7 < x < 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 2\}$

Atenção: quando multiplicamos uma inequação do tipo $-2 < -x < 7$, por um número negativo, devemos *trocar os extremos*, mas cuidado quando aparecer o sinal igual (=) acompanhando apenas **uma** das desigualdades.

103. Resolva as inequações:

a) $4 \leq 3x - 1 < 8$

b) $\frac{1}{3} < 2x + 5 \leq 1$

c) $5 \leq 4 - x < 10$

d) $-1 \leq 2 - \frac{x}{3} \leq 1$

e) $0 < -4x + 7 \leq 2$

f) $5 < -\frac{3x}{4} + 1 < 7$

g) $-3 < \frac{6 - x}{2} < 8$

h) $\frac{4}{5} \leq \frac{x-1}{2} - x < \frac{7}{3}$

104. Resolva as inequações:

a) $2 - 5x < x + 1 \leq 2x + 3$

b) $2x - 6 < 3x + 2 \leq 10 - x$

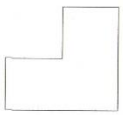
c) $-1 + x < 2x < 6 - x$

Sugestão: faça um sistema de inequações

Pense e Faça

F_{11}: Divisão Exata

Divida a figura em quatro partes iguais.



F_{12}: Idade Misteriosa

Um homem nasceu na primeira metade do século XIX, e tinha x anos no ano x^2. Em que ano ele nasceu?

F_{13}: Dos Pés à Cabeça

Num grupo de cabras e patos, o número de pernas é 14 mais duas vezes o número de cabeças. É possível determinar o número de cabras e patos?

F_{14}: Sobe e Desce

Um poço tem 10 metros de profundidade. Uma lesma sobe 5 metros durante o dia e escorrega 4 metros durante a noite, enquanto dorme. Em quantos dias sairá do poço?

F_{15}: Pedro e Paulo Apostam uma Corrida

Pedro corre a metade do tempo e anda a outra metade. Paulo corre a metade da distância e anda a outra metade. Se ambos correm e andam, respectivamente com as mesmas velocidades, quem chegará primeiro?

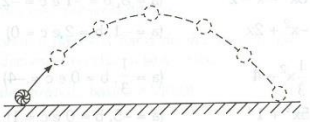
4.1 - Exemplos Introdutórios
4.2 - Gráfico da Função do 2º Grau
4.3 - Estudo do Sinal
4.4 - Inequações

Capítulo 4
Função do 2º Grau

4.1 Exemplos Introdutórios

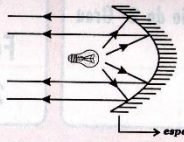
Se observarmos atentamente, encontraremos fenômenos na natureza que possuem movimentos cuja trajetória tem a forma de **parábola**. Por exemplo:

1º) Uma bola lançada a partir do solo descreve uma parábola



2º) A trajetória de uma bomba lançada por um avião que voa horizontalmente, é vista por um observador na Terra em forma de arco de parábola.

Também existem espelhos cuja superfície possui a forma de uma parábola, chamados *espelhos parabólicos*, utilizados em faróis de automóveis, holofotes etc.



DEFINIÇÃO

Chama-se função do 2º grau ou função quadrática, toda função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são números reais, sendo a não nulo.

São exemplos de funções do 2º grau:

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ (a = 2, b = 3 e c = 1)
- $f(x) = 8x^2 - x - 2$ (a = 8, b = –1 e c = –2)
- $f(x) = -x^2 + 2x$ (a = –1, b = 2 e c = 0)
- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4$ ($a = \frac{1}{3}$, b = 0 e c = –4)
- $f(x) - 5x^2 + 1$ (a = –5, b = 0 e c = 1)

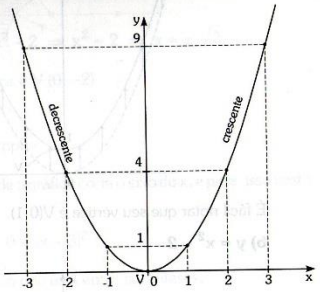
Toda função do 2º grau tem por gráfico uma parábola.

A parábola é uma antiga curva que foi descoberta por Menaechmus (cerca de 375 a 325 a.C.).

4.2 Gráfico da Função de 2º Grau

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = x^2$

x	$f(x) = x^2$
–3	9
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Chamaremos essa parábola de **básica**.

O ponto onde a parábola passa de *decrescente para crescente* (ou *crescente para decrescente*) chama-se **vértice**.

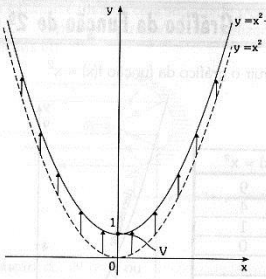
O vértice da *parábola básica* é V(0,0).

Deslocamento de Gráfico

Vamos construir os gráficos das seguintes funções:

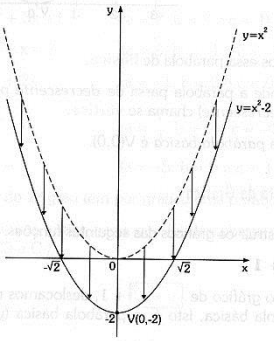
a) $y = x^2 + 1$

Para fazer o gráfico de $y = x^2 + 1$, deslocamos na vertical de uma unidade a parábola básica, isto é, a parábola básica ($y = x^2$) subiu uma unidade.



É fácil notar que seu vértice é V(0,1).

b) $y = x^2 - 2$



Agora, a parábola básica ($y = x^2$) desceu duas unidades.

$$\boxed{y = x^2} - 2$$

Notamos que o gráfico corta o eixo do x em dois pontos. Como descobri-los?

É simples! Basta lembrarmos que, se um ponto está no eixo x, sua ordenada y é zero, então temos:

$$y = x^2 - 2 \Rightarrow 0 = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

É fácil notar que seu vértice é V (0, –2)

c) $y = (x - 3)^2$

Preste atenção neste exemplo:

- Primeiro vamos ver onde o gráfico corta o eixo do x, e para isso basta fazer $y = 0$.

$$0 = (x - 3)^2$$

Agora tampe com a mão o que está entre parênteses.

$$(x-3)^2 = 0$$

Que número elevado ao quadrado é igual a zero?

É claro que só pode ser zero, isto é, aquilo que está escondido debaixo da mão é igual a zero.

Então: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

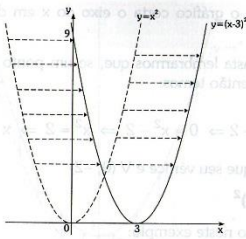
Assim o gráfico corta o eixo x no ponto de abscissa 3.

- E quando o gráfico corta o eixo y?

É evidente que nesse ponto, x tem que ser zero, então:

$$y = (0 - 3)^2 \Rightarrow y = 9$$

Façamos o gráfico.

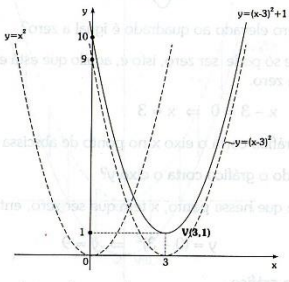


Note que a parábola básica ($y = x^2$) foi deslocada horizontalmente três unidades para a direita e seu vértice é V(3, 0).

d) $y = (x - 3)^2 + 1$

Agora é fácil verificar que a parábola básica ($y = x^2$) foi deslocada três unidades para a direita e uma unidade para cima.

Então seu gráfico é:



E como descobrir onde o gráfico corta o eixo y? Basta fazer x=0.

$$y = (0 - 3)^2 + 1 \Leftrightarrow y = 10$$

Seu vértice é V(3, 1).

Exercícios

105. A partir da parábola básica, construa o gráfico das seguintes funções:

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = x^2 - 4$

c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (x + 3)^2$

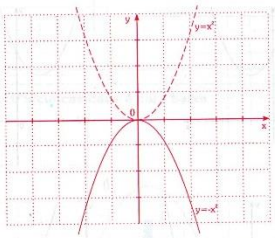
e) $y = (x - 1)^2 + 2$ f) $y = (x + 2)^2 - 3$

g) $y = (x - 3)^2 - 4$ h) $y = (x + 1)^2 + 2$

106. Faça o gráfico da função $f(x) = -x^2$

Solução:

No gráfico da função $y = x^2$, para todo x real, os valores de y são positivos ou nulo, e no gráfico de $y = -x^2$, os valores de y são negativos ou nulo, isto é, a função $y = -x^2$ é igual à básica ($y = x^2$) multiplicada por –1. Assim para obtermos o gráfico de $y = -x^2$ basta rebatermos a parábola básica 180° em relação ao eixo x.



107. Construa o gráfico das seguintes funções, destacando as raízes (quando existirem) e o seu vértice.

a) $y = -x^2 + 1$ b) $y = -x^2 - 2$

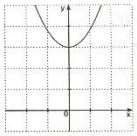
c) $y = -(x - 1)^2$ d) $y = -(x + 2)^2$

e) $y = -(x - 3)^2 + 1$ f) $y = -(x + 4)^2 - 2$

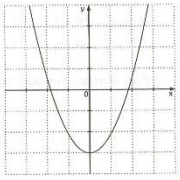
108. Em cada item a seguir, a parábola básica ($y = x^2$) foi deslocada no plano. Determine:

- a sua expressão analítica
- as raízes
- o vértice

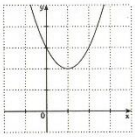
a)



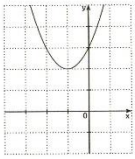
b)



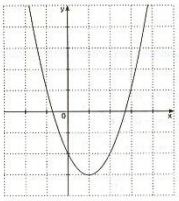
c)



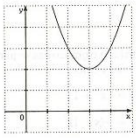
d)



e)



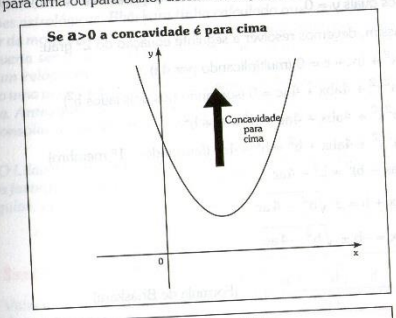
f)



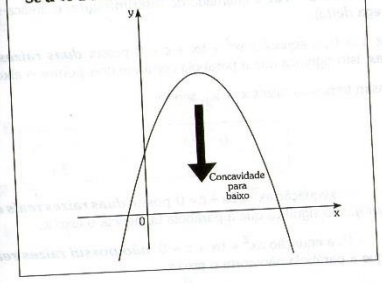
Concavidade

A parábola que representa a função $y = ax^2 + bx + c$ tem **concavidade** voltada para cima ou para baixo, determinada pelo coeficiente **a**.

Se a>0 a concavidade é para cima



Se a<0 a concavidade é para baixo



Raízes — Fórmula de Bháskara

Os pontos onde o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ corta o eixo x são as *raízes ou zeros* dessa função. Nesses pontos, devemos obter os valores de x para os quais $y = 0$.

Assim, devemos resolver a seguinte equação do 2º grau:

$ax^2 + bx + c = 0$ (multiplicando por 4a)

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (somando nos dois lados b^2)

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = 0 + b^2$

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ (fatorando o 1º membro)

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ (Fórmula de Bháskara)

O número $\mathbf{b^2-4ac}$ é chamado de *discriminante*, e indica-se por Δ (letra grega *delta*).

Se $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui ***duas raízes reais e distintas***, isto significa que a parábola corta em dois pontos o eixo x.

Assim temos as raízes x_1 e x_2, sendo:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Se $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui ***duas raízes reais e iguais (raiz dupla)***, isto significa que a parábola tangencia o eixo x.

Se $\Delta < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ***não possui raízes reais***, isto significa que a parábola não corta o eixo x.

**Bháskara Akaria (1114 - 1185) foi o último matemático medieval importante da Índia. É autor de dois livros: Lilavati e Vija - Ganita.*

Lilavati é o nome da filha de Bháskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bháskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício numa hora determinada de um dado dia. No dia que deveria ser o de seu casamento, a jovem ansiosa estava debruçada sobre um relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia tinha passado. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome a um de seus livros.

O Lilavati como Vija-Ganita contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações do 1º e 2º graus, radicais, triângulos, retângulos, etc.

*(*extraído do livro História da Matemática de Carl B. Boyer)*

Soma e Produto das Raízes

Vamos ver o que acontece quando somamos e multiplicamos as duas raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

- $S = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} =$

$= \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

Então: $\boxed{S = -\frac{b}{a}}$

- $P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

$\frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Então: $\boxed{P = \frac{c}{a}}$

Podemos obter as raízes de uma equação do 2º grau por meio da soma e produto das mesmas.

Vamos encontrar as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Como a = 1, b = –5 e c = 6, então:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5 \quad e \quad P = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

Quais são os números cujo produto é 6 e a soma 5?

É fácil verificar que esses números são 2 e 3, pois 2.3 = 6 e 2+3=5.

Assim as raízes são 2 e 3.

Exercícios

109. Determine, em IR , as raízes das seguintes equações.

a) $x^2 - 11x + 28 = 0$

b) $(x+2)^2 = 0$

c) $5x^2 + 4x - 1 = 0$

d) $(x-2)^2 + (1-3x)^2 = 5$

e) $\frac{x+1}{3} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{2}$

f) $\frac{x(x+2)}{x^2-3} = \frac{24}{13}$

g) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

h) $4x^2 - 9x + 5 = 0$

i) $x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

j) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{2}\right) + 6 = 0$

k) $-2x^2 - 4x + 6 = 0$

l) $x^2 - 6x + 9 = 0$

m) $2x^2 - 7x - 30 = 0$

n) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

o) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

p) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

110. Determine, em IR, as raízes das equações:

a) $2x^2 - x = 0$

b) $3x^2 - 24 = 0$

Solução:

Quando a equação é incompleta, podemos dispensar Bháskara e resolvemos do seguinte modo:

a) $2x^2 - x = 0$

$x(2x - 1) = 0$ (equação produto)

Para que o produto seja zero, é necessário que pelo menos um dos fatores seja zero. Assim:

$x = 0$ ou

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

b) $3x^2 - 24 = 0$

$3x^2 = 24$

$x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{8}$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

$S = \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

111. Resolva em IR as equações:

a) $4x^2 + x = 0$

b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x - 5x^2 = 0$

d) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x = 0$

e) $x^2 - 225 = 0$

f) $4x^2 = 25$

g) $x^2 - \sqrt{2} = 0$

h) $2x^2 + 1 = 0$

112. Mostre que se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, admite as raízes reais x_1 e x_2, então: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Solução:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

Como $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ e $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, substituindo na expressão anterior, temos:

$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2]$

$a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a.(x - x_1)(x - x_2)$

Temos assim, a forma fatorada do trinômio do 2º grau.:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

113. Fatore o trinômio $2x^2 - 10x - 28$

Solução:

$2x^2 - 10x - 28 = 0$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$\left.\begin{matrix} S = 5 \\ P = -14 \end{matrix}\right\} x_1 = -2, \quad x_2 = 7$

Como a = 2 (da equação original), temos:

$2x^2 - 10x - 28 = 2(x + 2)(x - 7)$

114. Escreva na forma fatorada:

a) $3x^2 - 6x - 9$

b) $x^2 - 5x + 6$

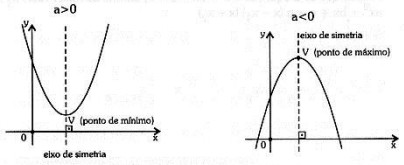
c) $3x^2 - 12$

d) $x^2 - (1+\sqrt{5})x + \sqrt{5}$

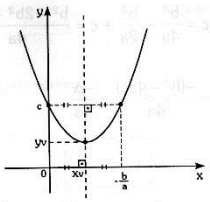
Vértice da Parábola

O vértice da parábola é o seu ponto de máximo (quando $a < 0$) ou de mínimo (quando $a > 0$) da função.

A reta paralela ao eixo y que passa pelo vértice é o eixo de simetria da parábola.



Vamos encontrar o vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola.



Sendo $y = ax^2 + bx + c$, para x = 0 temos y = c, isto é, a parábola corta o eixo y no ponto de ordenada c. Existe outro ponto de ordenada igual a c. Vamos achar a sua abscissa!

$ax^2 + bx + c = c$

$ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$

$x = 0$ (já encontrado) ou $ax + b = 0$, assim

$$x = -\frac{b}{a}$$

Por simetria da parábola, a abscissa do vértice é:

$$x_v = \frac{0 + \left(\frac{-b}{a}\right)}{2}$$

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Para obtermos a ordenada do vértice basta substituir $x = \frac{-b}{2a}$ em $y = ax^2 + bx + c$. Então,

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Logo,

$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

Exercícios

115. Faça o gráfico das seguintes funções, destacando:

- as raízes, se existirem.
- as coordenadas do vértice.
- a intersecção com eixo y.
- e dê o conjunto imagem.

a) $y = 2x^2 - 8x + 6$ b) $y = -x^2 + x - 1$

Solução:

a) $y = 2x^2 - 8x + 6 \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 6 \end{cases}$

Raízes:

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm 4}{2.2} = \frac{8 \pm 4}{4} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Coordenadas do vértice:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2.2} = 2 \\ y_v &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4.2} = -2 \end{aligned}\right\} V(2, -2)$$

Convém destacar que se a função $y = ax^2 + bx + c$ possui duas raízes reais e distintas (x_1 e x_2), podemos obter a abscissa do vértice, fazendo a média aritmética entre as duas raízes, isto é:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

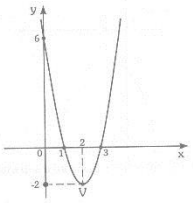
substituindo x por 2 na função $y = 2x^2 - 8x + 6$, temos y_v. Então:

$$y_v = 2.2^2 - 8.2 + 6 = -2$$

Intersecção com o eixo y:

Nesse ponto x = 0, então y = 6. Temos o ponto (0,6).

Esboço do gráfico:



Conjunto imagem:

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$

b) $y = -x^2 + x - 1 \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

Raízes:

$-x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1)(-1) = -3$

Como $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais, isto é, a parábola não corta o eixo x.

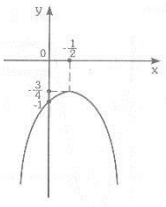
Coordenadas do vértice:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{-1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \\ y_v &= \frac{-(-3)}{4(-1)} = -\frac{3}{4} \end{aligned}\right\} V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

Intersecção com o eixo y:

Nesse ponto x = 0, então y = −1. Temos o ponto (0,−1).

Esboço do gráfico:



Conjunto imagem:

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -3/4\}$

116. Faça o gráfico das seguintes funções, destacando:

- as raízes, se existirem.
- as coordenadas do vértice.
- a intersecção com o eixo y.
- e dê o conjunto imagem.

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$ b) $y = -x^2 - 2x + 8$

c) $y = x^2 - 2x - 3$ d) $y = -3x^2 + 9x - 6$

e) $y = 5x^2 - 4x + 1$ f) $y = x^2 - 4x$

117. Dê o conjunto imagem, sem esboçar o gráfico.

a) $y = -2x^2 + x + 3$ b) $y = 3x^2 + 5x - 1$

c) $y = 7x^2 - x$ d) $y = \frac{x^2 + 1}{3}$

118. Dê o valor mínimo da função $y = x^2 - 3x + 1$.

119. Dê o valor máximo da função $y = -2x^2 + 3x - 5$.

120. Determine m de modo que a função $y = x^2 - 8x + m + 1$ tenha valor mínimo igual a −3.

121. Determine m para que a função $y = (m-1)x^2 + 2x + 1$ tenha um valor máximo em x = 2.

Solução:

Para admitir um valor máximo, é necessário que a parábola tenha concavidade para baixo, isto é, $a < 0$. Assim $m - 1 < 0$, e devemos ter $m < 1$.

Então:

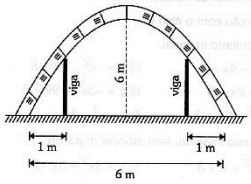
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(m-1)} = 2$$

Resolvendo esta equação, encontramos $m = \frac{1}{2}$

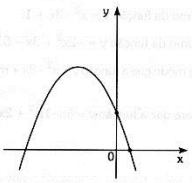
122. Determine m para que a função $y = -x^2 + (m-3)x + m$ tenha valor máximo igual a 3.

123. A função $y = mx^2 + 4x + m$ tem conjunto imagem $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -2\}$. Determine o valor de m.

124. Um túnel de formato parabólico deve ser reformado, e para isto é necessário colocar duas vigas de sustentação distantes cada uma delas 1m da borda do túnel. Que altura deve ter esta viga?



125. Determine os sinais de a, b e c da função $y = ax^2 + bx + c$ abaixo representada.



Solução:

$a < 0$ pois a concavidade da parábola está para baixo.

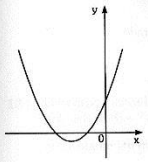
$c > 0$ pois a parábola corta o eixo y num valor positivo.

Como $S = -\frac{b}{a}$, sendo $S < 0$ (veja no gráfico) e $a < 0$ é evidente que $b < 0$. Veja no esquema:

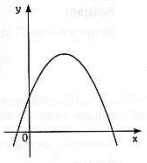
$S = -\frac{b}{a}$ → negativo
→ negativo

126. Determine os sinais de a, b e c da função $y = ax^2 + bx + c$ nos seguintes casos:

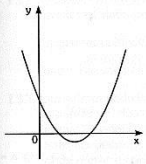
a)



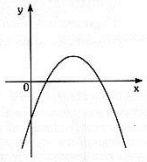
b)



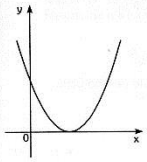
c)



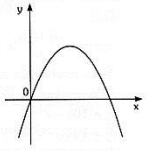
d)



e)



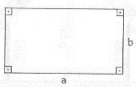
f)



127. Que dimensões deve ter um retângulo de perímetro 20 cm para que sua área seja a maior possível? Obtenha esta área.

Solução:

Sejam a e b as dimensões do retângulo procurado



Perímetro: $2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$

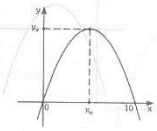
Área: $y = ab$

Substituindo $b = 10 - a$ em $y = ab$, temos:

$y = a(10 - a)$

$y = 10a - a^2$

Representando graficamente esta função vem:



Zeros da função:

$10a - a^2 = 0$

$a(10 - a) = 0$ → $a = 0$ ou $10 - a = 0 \Rightarrow a = 10$

A dimensão **a** que torna a área do retângulo a maior possível é a abscissa do vértice da parábola, e a ordenada é a área máxima.

Então:

$a = x_v = \frac{0 + 10}{2} = 5$ e $b = 10 - 5 = 5$

Assim o retângulo de maior área é um quadrado de lado 5cm.

Área máxima:

$y_v = 10a - a^2$

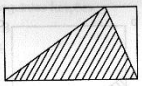
$y_v = 10.5 - 5^2 = 25$

A maior área é 25 cm^2.

128. Dividir o número 18 em duas partes para que o seu produto seja o maior possível.

129. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular, usando para os outros lados 400m de tela de arame. Determine as dimensões do curral para que sua área seja máxima.

130. O retângulo da figura tem perímetro 16cm. Determine suas dimensões para que a área do triângulo hachurado seja máxima.



131. Um corpo é lançado verticalmente para cima e sua altura (h) em função do tempo (t) é dada por $h = 72t - 4t^2$, onde h é dada em metros e t em segundos. Determine:

a) o instante em que o corpo atinge a altura máxima;

b) a altura máxima alcançada pelo corpo.

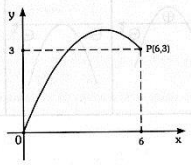
132. O custo, em reais, de uma empresa para produzir x unidades de um determinado produto é dado por $C = x^2 - 30x + 5000$. Determine:

a) quantas unidades devem ser produzidas para que o custo seja o menor possível;

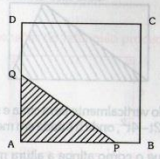
b) o custo mínimo.

133. Um determinado fio é constituído de um material que, quando preso a dois pontos distantes um do outro de 20m e ambos a 13m do solo, toma a forma de uma parábola, estando o ponto mais baixo do fio a 3m do solo. Determine a expressão analítica dessa parábola, considerando o sistema de coordenadas cartesianas, onde o eixo y contém o ponto mais baixo do fio e o eixo x está sobre o solo.

134. Um menino está à distância de 6m de um muro com altura de 3m e chuta uma bola que vai bater exatamente sobre o muro. A equação da trajetória da bola em relação ao sistema de coordenadas indicado pela figura é $y = ax^2 + (1 - 4a)x$. Determine a altura máxima atingida pela bola.



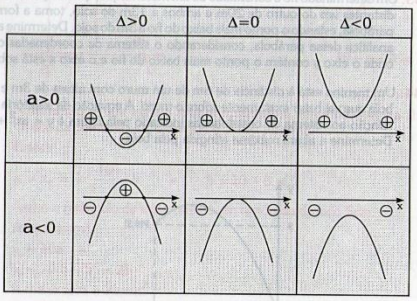
135. Na figura, temos um quadrado de área 1. Tomando-se os pontos P no lado $\overline{AB}$ e Q em $\overline{AD}$ tais que PA + AQ = AD, determine a área máxima do triângulo hachurado.



4.3 Estudo do Sinal

Já vimos que estudar o sinal de uma função significa verificar os valores de x para os quais esta função é positiva ou negativa.

No quadro abaixo, temos as possíveis situações da parábola no plano cartesiano com os respectivos sinais da função.



Exercícios

136. Estude o sinal das seguintes funções:

a) $y = 3x^2 - 10x + 3$

b) $y = -x^2 + 8x - 16$

c) $y = -x^2 + 3x - 4$

Solução:

a) $y = 3x^2 - 10x + 3$

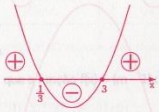
$a = 3 > 0$, então a concavidade da parábola é para cima

$\Delta = (-10)^2 - 4.3.3 = 64$

$\Delta > 0$, então existem duas raízes reais e distintas, isto é, a parábola corta x em dois pontos distintos.

Raízes: $x = \dfrac{10 \pm 8}{6} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Sinal:



Para $x < \dfrac{1}{3}$ ou $x > 3$, temos $y > 0$

Para $\dfrac{1}{3} < x < 3$, temos $y < 0$

b) $y = -x^2 + 8x - 16$

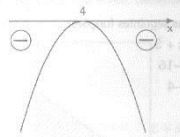
$a = -1 < 0$, então a concavidade da parábola é para baixo.

$\Delta = 8^2 - 4\,(-1)\,(-16) = 0$

$\Delta = 0$, então existem duas raízes reais e iguais, isto é, a parábola tange eixo x.

Raízes: $x = \dfrac{-8 \pm 0}{2.(-1)} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Sinal:



Para todo x real diferente de 4, temos $y < 0$

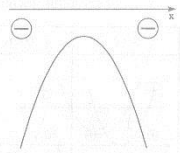
c) $y = -x^2 + 3x - 4$

$a = -1 < 0$, então a concavidade da parábola é para baixo, isto é, a parábola não corta o eixo x.

$\Delta = 3^2 - 4\,(-1)\,(-4) = -7$

$\Delta < 0$, então não existe raiz real

Sinal:



Para todo x real, temos $y < 0$

137. Estude o sinal das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 8x + 15$

b) $y = 8x^2 - 10x + 3$

c) $y = 9x^2 - 6x + 1$

d) $y = (x + 1)^2$

e) $y = 2x^2 + x + 3$

f) $y = x^2 + 1$

g) $y = -2(x - 1)(x + 5)$

h) $y = -x^2 + 2x$

i) $y = -x^2 + 10x - 25$

j) $y = -x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 3$

k) $y = -x^2 + 2x - 5$

l) $y = x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

138. Determine m para que se tenha $x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 1 > 0$.

Solução:

Para que a função seja sempre positiva devemos ter $\Delta < 0$, então

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Delta = (2m - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1) < 0$

$4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 4 < 0$

$-12m < -13$

$12m > 13$

$m > \dfrac{13}{12}$

$S = \{ m \in \mathbb{R} \mid m > \dfrac{13}{12} \}$

139. Determine m de modo que se tenha $x^2 - (4m + 2)x + 4m^2 \geq 0$.

140. Determine m para que a função $y = mx^2 - 4x - 2$ seja sempre negativa para toc x real.

141. Determine m de modo que a função $y = (m + 2)x^2 + 2(1 - m)x + m$ seja pa todo x real:

a) sempre positiva,

b) sempre negativa.

142. Determine m para que a função $f(x) = (m - 1)x^2 + mx + 1$ tenha dois zeros rea e iguais.

143. O lucro de um empresa é dado, em reais, por $L(x) = 400\,(20 - x)(x - 4)$ onde é o número de produtos vendidos. Pede-se:

a) Quando o lucro é positivo?

b) Quando há prejuízo?

c) A quantidade vendida para que o lucro seja máximo? Quanto é este lucro?

d) Se vender 3 unidades, haverá lucro ou prejuízo?

4.4 Inequações

Qualquer inequação do tipo $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, onde a, b, c são números reais com $a \neq 0$ são chamadas inequações do 2º grau.

Resolvemos uma inequação do 2º grau a partir do estudo do sinal da função correspondente.

Exercícios

144. Resolva as seguintes inequações:

a) $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$ b) $2x^2 - 13x + 15 < 0$

c) $-3x^2 + 4x - 2 \leq 0$ d) $x^2 - 10x + 25 > 0$

Solução:

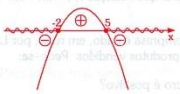
a) $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$

Raízes:

$\left.\begin{array}{l} S = 3 \\ P = -10 \end{array}\right\} x_1 = -2,\ x_2 = 5$

a=−1 < 0, a parábola tem concavidade para baixo.

Sinal:



Como devemos ter $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$ (destacados graficamente pela "minhoca"), então:

S = { x ∈ IR | x ≤ −2 ou x ≥ 5}

b) $2x^2 - 13x + 15 < 0$

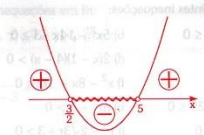
Raízes:

Δ=169−120=49

$\left.x = \dfrac{13 \pm 7}{4}\right\} x_1 = \dfrac{3}{2},\ x_2 = 5$

a=2 > 0, a parábola tem concavidade para cima.

Sinal:



Logo, $S = \{ x \in IR \mid \frac{3}{2} < x < 5 \}$

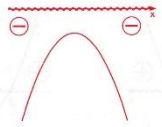
c) $-3x^2 + 4x - 2 \leq 0$

Raízes:

Δ=16−24=−8 < 0, não possui raízes reais.

a=−3 < 0, a parábola tem concavidade para baixo.

Sinal:



S = IR

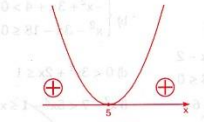
d) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

Raízes:

$\left.\begin{array}{l} S = 10 \\ P = 25 \end{array}\right\} x_1 = x_2 = 5$

a=1 > 0, a parábola tem concavidade para cima.

Sinal:



S = {5}

145. Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ b) $5x^2 - 14x - 3 \geq 0$

c) $x^2 - 4x < 0$ d) $2(x - 1)(4 - x) > 0$

e) $(2x - 7)^2 \geq 0$ f) $x^2 - 8x + 16 < 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$ h) $m^2 + 1 > 0$

i) $3t^2 + t + 5 \leq 0$ j) $r^2 - 2\sqrt{3}r + 3 > 0$

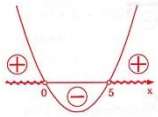
146. Resolva a inequação $0 < x^2 - 5x \leq 14$.

Solução:

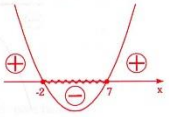
Devemos resolver o seguinte sistema:

$\begin{cases} x^2 - 5x > 0 \\ x^2 - 5x \leq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x > 0 & ① \\ x^2 - 5x - 14 \leq 0 & ② \end{cases}$

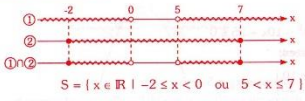
Solução da ①: $x^2 - 5x > 0$



Solução da ②: $x^2 - 5x - 14 \leq 0$



Fazendo o varal, temos:



S = { x ∈ IR | −2 ≤ x < 0 ou 5 < x ≤ 7 }

147. Resolva em IR:

a) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 > 0 \\ x^2 - 3x - 18 \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 1 > 3x - 2 \\ x^2 - 6x + 8 \leq 0 \end{cases}$ d) $0 < 3x^2 + 2x \leq 1$

e) $-4 \leq x^2 - 5x \leq 6$ f) $x^2 - 7 < 5x^2 - 1 \leq x^2$

148. Resolva as inequações em IR:

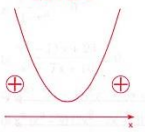
a) $(x^2 + 2x + 7)(x^2 - 7x + 6) \leq 0$

b) $\dfrac{x - x^2}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$

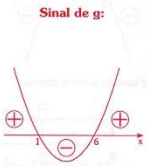
Solução:

a) $\underbrace{(x^2 + 2x + 7)}_{f}\ \underbrace{(x^2 - 7x + 6)}_{g} \leq 0$

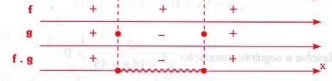
Sinal de f:



Sinal de g:



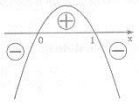
No varal temos:



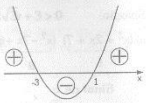
S = {x ∈ IR | 1 ≤ x ≤ 6}

b) $\dfrac{\overbrace{x - x^2}^{f}}{\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{g}} \geq 0$

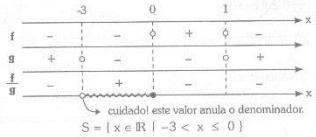
Sinal de f:



Sinal de g:



Fazendo o varal temos:



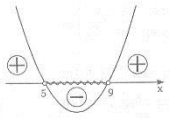
$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0 \}$

149. Resolva a seguinte inequação $\dfrac{-2}{x^2 - 14x + 45} > 0$.

Solução:

Para que o quociente seja positivo devemos ter $x^2 - 14x + 45 < 0$, pois o numerador da inequação (–2) é negativo. Então:

$x^2 - 14x + 45 < 0$



$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 9 \}$

150. Resolva as seguintes inequações:

a) $\dfrac{5}{x^2 - x - 6} < 0$

b) $\dfrac{-12}{x - x^2} \geq 0$

c) $\dfrac{45}{7x^2 - 6x - 1} < 0$

d) $\dfrac{9}{x^2 - x + 1} > 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)^5 \geq 0$

f) $\dfrac{-3}{(2x^2 - 4)^7} < 0$

151. Resolva, em IR, as inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2} > 0$

b) $\dfrac{x^2 - 11x + 24}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$

c) $(x^2 - 2x + 1)(-x^2 + 3x + 10) \leq 0$

d) $x^2 (x^2 - x)(2x^2 - 7x + 3) < 0$

e) $(x^2 - 3x + 2)(-x^2 + x - 7)(-2x^2 + 3x - 12)(x^2 + 2) \geq 0$

f) $\dfrac{(-x^2 - 3)(x^2 - 1)}{x^2 - 2x} \geq 0$

g) $\dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 4} < 0$

h) $\dfrac{2x - 4}{(x^2 - 9)(x^2 - 2x - 15)} \geq 0$

152. Dê o domínio das funções:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{-x^2 + 5x - 6}}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2}$

153. Seja função $f(x) = x^2 - 3x$, determine x real para o qual $f(x - 1) \leq 0$.

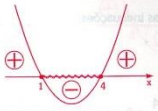
Solução:

$f(x - 1) \leq 0$

$(x - 1)^2 - 3(x - 1) \leq 0$

$x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 \leq 0$

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

154. Seja $f(x + 2) = x^2 - 1$, para todo x real, determine os valores de x para que se tenha $f(x) < 0$.

155. Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. Determine o domínio da função $h(x) = \sqrt{(fog)(x)}$.

156. Quais os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da função

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - mx + m}}$ seja real?

Pense e Faça

F_{16}: Empresa Danada!

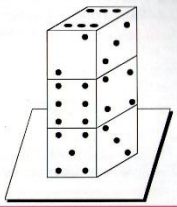
Para fazer uma excursão foi fretado um ônibus de 40 lugares onde cada pessoa deve pagar R$120,00 e uma taxa de R$15,00 para cada lugar não vendido. Quantas pessoas devem fazer esta excursão para que a companhia receba a maior quantidade de dinheiro?

F_{17}: As Torneiras

Um recipiente é dotado de duas torneiras. A primeira esvazia-o num tempo inferior ao da segunda de 30 minutos. Sabendo-se que as duas torneiras juntas esvaziam o recipiente em 20 minutos, determine em quanto tempo a primeira torneira esvazia 60% do recipiente.

F_{18}: Dado Embaixo!

A figura abaixo mostra três dados iguais. Qual o número da face que é a base inferior da coluna de dados?



F_{19}: Que Tijolada!

Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo, quanto pesa um tijolo e meio?

F_{20}: Questão Familiar

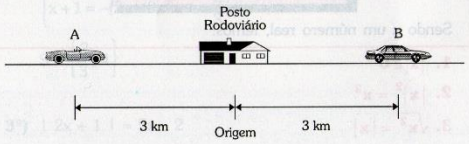
Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem um número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem um número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos e filhas tem o casal?

5.1 - Módulo de um Número Real
5.2 - Equações Modulares
5.3 - Inequações Modulares
5.4 - Gráfico da Função Modular

Capítulo 5 Função Modular

5.1 Módulo de um Número Real

Na figura, temos um posto rodoviário e dois carros A e B percorrendo uma estrada.



Em relação ao posto rodoviário, o carro A está a 3km antes da passagem e o carro B 3km após a passagem do posto. Assim indicamos a posição de A por −3km e a de B por +3km, considerando o posto como origem. Mas a distância que esses carros estão do posto é positiva e vale 3km. Esta distância nos dá a idéia do que representa o valor absoluto ou módulo de um número real.

DEFINIÇÃO

Chama-se valor absoluto ou módulo de um número real o próprio número se ele for positivo ou nulo, e o seu oposto se ele for negativo.

Indica-se o valor absoluto ou módulo de x por $|x|$.

Então:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo:

$|3| = 3$ $\quad |-3| = 3$ $\quad |0| = 0$

$\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ $\quad |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ $\quad |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

O módulo de um número real não pode ser negativo

Sendo x um número real, temos:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x|^2 = x^2$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. Se $|x| = a$ e $a > 0$, então $x = a$ ou $x = -a$

5.2 Equações Modulares

As equações envolvendo módulo são chamadas equações modulares.

São exemplos de equações modulares:

$|x - 1| = 5$

$|x + 1| = |2x - 3|$

$|2x + 1| = 5x - 2$

Vamos resolvê-las:

1º) $|x - 1| = 5$

Devemos ter:

$$\begin{cases} x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6 \\ \text{ou} \\ x - 1 = -5 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

$S = \{-4, 6\}$

2º) $|x + 1| = |2x - 3|$

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 4 \\ \text{ou} \\ x + 1 = -(2x - 3) \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$

3º) $|2x + 1| = 5x - 2$

Para ser possível a igualdade, devemos ter:

$5x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{5}$

Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 5x - 2 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -(5x - 2) \Rightarrow x = \frac{1}{7} \text{ (Não serve)} \end{cases}$$

$S = \{1\}$

Exercícios

157. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $|x| = 2$ b) $|x| = 0$

c) $|x| = -1$ d) $|x + 1| = 4$

e) $|2x + 8| = 30$ f) $|x - 2| = |x|$

g) $|3x + 1| = |1 - 3x|$ h) $|3x - 5| = 5x - 1$

i) $|2x + 3| = x - 1$ j) $|x + 2| = 2|x - 2|$

k) $|x^2 - 1| = 8$ l) $\left|\frac{x+2}{x}\right| = 3$

m) $\left|\frac{2x-3}{4x}\right| = \frac{1}{2}$ n) $||x| - 1| = 2$

158. Resolver a equação em $\mathbb{R}$: $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$

Solução:

Fazendo $|x| = y$, temos

$y^2 - 2y - 3 = 0 \begin{cases} y = -1 \text{ (não serve)} \\ y = 3 \end{cases}$

Então:

$|x| = 3$, $x = -3$ ou $x = 3$

$S = \{-3, 3\}$

159. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $|x|^2 + 3|x| - 10 = 0$ b) $|x|^2 - 2|x| - 8 = 0$

c) $2|x|^2 - 4|x| = 0$ d) $|x - 1|^2 - 5|x - 1| + 6 = 0$

e) $|3x^2 - 4| = x^2 - 4$

160. Sendo $f(x) = |x - 3|$ e $g(x) = |x + 3|$, obtenha $(fog)(-5)$.

161. Qual o conjunto dos valores assumidos pela expressão:

$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$, quando a, b, c variam no conjunto de todos os números reais não-nulos?

162. Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, determine a e b.

163. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{(x-1)^2} = 2$.

164. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x - 1| + |x + 3| = 6$

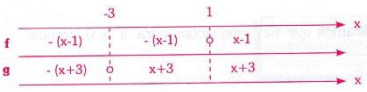
Solução:

$|x - 1| + |x + 3| = 6$

f g

Temos: 1 é zero de f e -3 é zero de g.

Então:



Como $f + g = 6$, temos:

1º) $-(x - 1) - (x + 3) = 6$
$x = -4$

2º) $-(x - 1) + x + 3 = 6$
não tem solução

3º) $x - 1 + x + 3 = 6$
$x = 2$

Logo, $S\{-4, 2\}$

165. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x - 2| + |x + 1| = 7$

b) $|x + 1| - |x + 3| = -2$

5.3 Inequações Modulares

As inequações envolvendo módulo são chamadas inequações modulares.

São exemplos de inequações modulares:

$|x| \leq 2$

$|x| \geq 1$

Vamos resolvê-las:

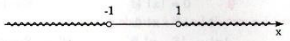
1º) $|x| \leq 2$

Os valores de x que satisfazem a inequação estão no intervalo:

Assim: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

2º) $|x| > 1$

Os valores de x que satisfazem a inequação estão no intervalo:



Assim: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

Verificamos que nas inequações para $a > 0$, temos:

1º) Se $|x| < a$, então $-a < x < a$

2º) Se $|x| > a$, então $x < -a$ ou $x > a$

Exercícios

166. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|2x - 4| < 6$ b) $|3x - 6| \geq 9$

Solução:

a) $|2x - 4| < 6$
$-6 < 2x - 4 < 6$
$-6 + 4 < 2x < 6 + 4$
$-2 < 2x < 10$
$-1 < x < 5$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$

b) $|3x - 6| \geq 9$
$3x - 6 \leq -9$ ou $3x - 6 \geq 9$
$3x \leq -3$ $3x \geq 15$
$x \leq -1$ $x \geq 5$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 5\}$

167. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|x| \leq 4$ b) $|x| \geq 7$

c) $|x - 1| > 2$ d) $|x + 3| < 1$

e) $|2x + 3| < 5$ f) $|3x - 4| \geq 2$

168. Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $\left|\frac{x-3}{2}\right| \leq 5$ b) $\left|\frac{2x+1}{3}\right| > 5$ c) $\left|\frac{3x-4}{3}\right| < \frac{1}{2}$

169. Resolva a inequação $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \leq 3$, em $\mathbb{R}$:

Solução:

Devemos ter:

$-3 \leq \frac{x-1}{x+2} \leq 3$ ou $\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \leq 3 & (1) \\ \frac{x-1}{x+2} \geq -3 & (2) \end{cases}$

Jamais multiplique em cruz uma inequação com variável no denominador

Solução da (1):

$\frac{x-1}{x+2} \leq 3$

$\frac{x-1}{x+2} - 3 \leq 0$

$\frac{x-1-3(x+2)}{x+2} \leq 0$

$\frac{-2x-7}{x+2} \leq 0$

Resolvendo, encontramos:

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{2} \text{ ou } x > -2\right\}$

Solução da (2):

$\frac{x-1}{x+2} \geq -3$

$\frac{x-1}{x+2} + 3 \geq 0$

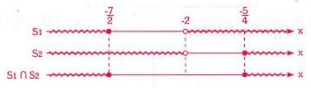
$\frac{x-1+3(x+2)}{x+2} \geq 0$

$\frac{4x+5}{x+2} \geq 0$

Resolvendo, encontramos:

$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq -\frac{5}{4}\right\}$

Fazendo $S_1 \cap S_2$, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{2} \text{ ou } x \geq -\frac{5}{4}\right\}$

170. Resolva em IR as inequações:

a) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 2$ b) $\left|\frac{x+3}{x+1}\right| \leq 1$

c) $\left|\frac{2x+1}{1-x}\right| \geq 3$ d) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| > 0$

171. Resolva as inequações:

a) $|x-2| + |x-3| > 2$

b) $|x+3| - |x-1| \geq 0$

(obs: faça analogia com o exercício 164)

172. Obtenha as soluções inteiras do sistema:

$$\begin{cases} |x-2| \geq 3 \\ |2x+3| < 5 \end{cases}$$

173. Sendo x um número real, resolva:

a) $(1+x)(1-|x|) \geq 0$

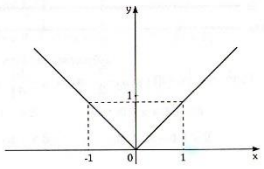
b) $\sqrt{(1+x)^2} \leq 1$

5.4 Gráfico da Função Modular

Chama-se função modular, a função real $f(x) = |x|$, onde:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } x \geq 0 \\ -x, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

fazendo seu gráfico, temos:



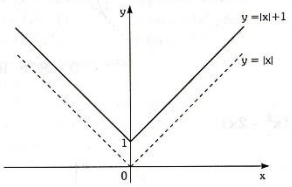
Notamos que o domínio é IR e o conjunto imagem é IR_+.

Construção de Gráfico

Vamos fazer os gráficos das seguintes funções, deslocando a função módulo:

1º) $f(x) = |x| + 1$

Estamos somando 1 na função módulo, portanto o seu gráfico foi deslocado uma unidade para cima.



Assim o domínio de f é IR e o conjunto imagem é $\{y \in IR \mid y \geq 1\}$

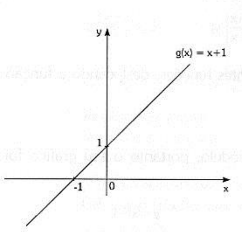
2º) $f(x) = |x + 1|$

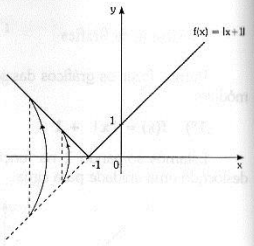
Para fazer o gráfico da função do tipo $f(x) = |g(x)|$, devemos:

1º) Fazer o gráfico de g(x).

2º) Rebater 180° em torno do eixo x a parte negativa do gráfico de g.

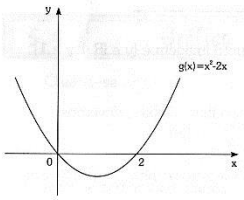
Assim

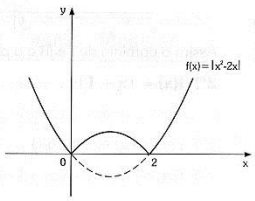




$D = IR$ e $Im = IR_+$

3º) $y = |x^2 - 2x|$





$D = IR$ e $Im = IR_+$

Exercícios

174. Faça o gráfico das seguintes funções, dando o domínio e o conjunto imagem.

a) $y = |2x|$ b) $y = |x| - 1$

c) $y = |x - 1|$ d) $y = -|x|$

e) $y = |x + 2|$ f) $y = |x - 2| + 1$

g) $y = -|x| + 2$ h) $y = -|x - 2|$

175. Faça o gráfico das funções:

a) $y = ||x| - 2|$ b) $y = |3 - |x||$

176. Represente graficamente:

a) $y = |x^2 - 2x - 3|$ b) $y = |-x^2 + 6x - 5|$

c) $f(x) = |x^2 - 1|$ d) $f(x) = -|x^2 - 5x + 4|$

e) $y = |-x^2 + 2x|$ f) $f(x) = -|x^2|$

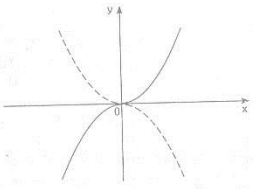
177. Faça o gráfico de $f(x) = x.|x|$.

Solução:

Se $x \geq 0$, temos $|x| = x$ e $f(x) = x^2$.

Se $x < 0$, temos $|x| = -x$ e $f(x) = -x^2$.

Graficamente:



178. Faça o gráfico das funções:

a) $f(x) = |x| + x$ b) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

c) $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$ d) $f(x) = x + |2x - |x||$

e) $f(x) = |x^2 - 2|x||$ f) $f(x) = \frac{2|x-2}{x-2}$

g) $f(x) = (1 + x)(1 - |x|)$

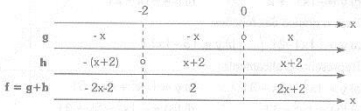
179. Faça o gráfico da função $f(x) = |x| + |x + 2|$ e dê o conjunto imagem:

Solução:

$f(x) = \underbrace{|x|}_{g} + \underbrace{|x+2|}_{h}$

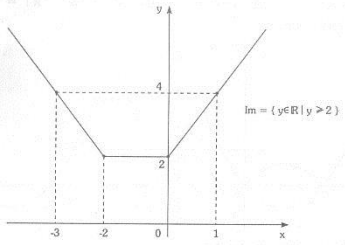
Temos:

A raiz de g é 0 e a raiz de h é –2



Então:

$$f(x) = |x| + |x + 2| = \begin{cases} -2x - 2, \text{ para } x < -2 \\ 2, \text{ para } -2 \le x < 0 \\ 2x + 2, \text{ para } x \ge 0 \end{cases}$$



180. Faça o gráfico das funções abaixo e dê seu conjunto imagem.

a) $f(x) = |x| + |x - 3|$ b) $f(x) = |x + 2| - |x|$

181. Faça o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

182. Dê o domínio das seguintes funções:

a) $y = \dfrac{1}{|x+1|-3}$ b) $y = \sqrt{|x-1|-2}$

c) $y = \sqrt{|x^2 - 4|}$ d) $y = |x| + \sqrt{|x| - 3}$

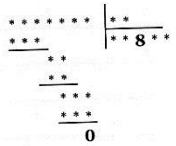
Pense e Faça

F_{21}: O Gato e o Rato

Se cinco gatos pegam cinco ratos em cinco minutos, cem gatos pegam cem ratos em quantos minutos?

F_{22}: Que Conta!

Reconstrua a divisão. Cada " * " representa um algarismo.



F_{23}: Salada de Sinais

Usando os sinais: +, –, x, :, $\sqrt{\ }$, ( ) e !, verificar as seguintes igualdades:

0	0	0	=	6		6	6	6	=	6
1	1	1	=	6		7	7	7	=	6
2	2	2	=	6		8	8	8	=	6
3	3	3	=	6		9	9	9	=	6
4	4	4	=	6		10	10	10	=	6
5	5	5	=	6						

F_{24}: Idades Confusas

Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens; quando tiveres a idade que eu tenho, a soma de nossas idades será 54 anos. Quais são a minha e a tua idades atuais?

F_{25}: Se eu Tivesse outro Vasilhame!

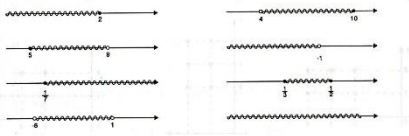
Como é possível retirar de um rio, exatamente 6 litros de água, se só disponho para medir o volume da água, de dois recipientes com 4 e 9 litros de capacidade? Os recipientes não estão graduados para indicar as frações do volume total.

Respostas

Capítulo 1

3. a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $-\frac{5}{2}$ d) $\frac{226}{99}$ e) $\frac{39}{90}$ f) $\frac{43}{100}$ g) $\frac{32}{9}$ h) $\frac{7061}{990}$ i) $\frac{247}{999}$

4. a) $[-3, 7]$ b) $\left]\frac{1}{2}, 5\right[$ c) $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$ d) $]-2, \sqrt{2}]$ e) $[7, +\infty[$ f) $]0, +\infty[$ g) $]-\infty, -4]$ h) $\left]-\infty, -\frac{7}{5}\right[$

5. 

6. b, e, f, g, i.

7. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 2\sqrt{2}\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

9. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 8\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 0 \text{ ou } 2 < x \le 5\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \le x \le 15\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x \le 4\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\}$

11. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 6\}$ b) $\{2\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$ d) $\varnothing$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 5\}$ f) $\varnothing$ g) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \le 7\}$

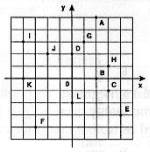
12. $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \le 5\}$

14. $]-1, 6]$

Capítulo 2

16. R_2, R_4 e R_6

17.

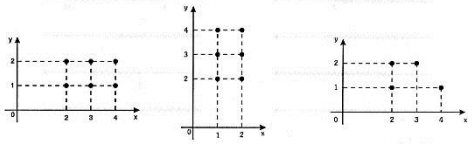


18. a) 1º quadrante b) 2º quadrante
c) 4º quadrante d) 3º quadrante

19. A(4, 0); B(2, 6); C(8, 4); D(0, 2); E(0, 7); F(-4, 6); G(-8, 3); H(-4, 0); I(-8, 0); J(-6, -2); K(-6, -6); L(0, -4); M(0, -8); N(4, -4); O(0, 0); P(8, -2); Q(10, 0).

20. a) $x = 10$ e $y = 6$ b) $x = 2$ e $y = 5$ c) $x = 2$ ou $x = 3$ e $y = 2$ ou $y = -2$

21. a) b) c)



23. a, c, d

25.

I. a) crescente em $\left[-4, -\frac{5}{2}\right]$ e [2, 6]; decrescente em $\left[-\frac{5}{2}, 2\right]$
b) -4, -1 e 5
c) positiva em $]-4, -1[$ e] 5, 6 [; negativa em $]-1, 5[$

II. a) crescente em $\mathbb{R}$
b) -1
c) positiva em $]-1, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -1[$

III. a) decrescente em $\mathbb{R}$
b) 3
c) positiva em $]-\infty, 3[$; negativa em $]3, +\infty[$

IV. a) crescente em [-5, -2]; decrescente em [-2, 2]
b) -3 e 1
c) positiva em] -5, 1 [; negativa em] 1, 2]

V. a) crescente em [-2, 3]; decrescente em $]-\infty, -2]$ e $[3, +\infty[$
b) -2 e 4
c) positiva em $]-\infty, -2[$ e]-2, 4[; negativa em $]4, +\infty[$

VI. a) crescente em $\mathbb{R}$
b) não possui raizes
c) positiva em $\mathbb{R}$

VII. a) decrescente em $\mathbb{R}_+^*$
b) 1
c) positiva em] 0, 1 [; negativa em $]1, +\infty[$

VIII. a) decrescente em $\mathbb{R}^*$
b) não possui raiz
c) positiva em $\mathbb{R}_+^*$; negativa em $\mathbb{R}_-^*$

IX. a) crescente em [0; 1, 5] e [4, 5; 6]; decrescente em [1,5 ; 4,5]
b) 0, 3 e 6
c) positiva em] 0, 3 [; negativa em] 3, 6 [

X. a) nem crescente e nem decrescente
b) não possui raiz
c) positiva em $\mathbb{R}$

26. a) 20ml b) 60kgf c) 4ml

27. a) 30ºC b) 11 min. c) 9 min. e 13 min.
d) positiva em [0, 9 [; negativa em] 9, 13 [
e) é aquecida de 0 a 3 min. e de 11 a 13 min. e resfriada de 3 a 5 min. e de 8 a 11 min.
f) 3 min., 8ºC

28. a) 64m b) 80km/h c) 36m d) 20m

29. a) dezembro b) agosto
c) fevereiro d) julho e outubro
e) 230 mil dólares

31. a) $\{-2, 0, 1, 2, 7\}$ b) $\{-5, -1, 1, 3, 13\}$ c) $\frac{3}{4}$

32. a) A b) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

33. a) 9 b) 16 c) $\frac{1}{9}$ d) $3 - 2\sqrt{2}$

34. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

36. $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$

38. a) $16cm^2$ b) $18cm^2$ c) 4cm
d) $15cm^2$ e) 0 f) y aumenta em 2 unidades

39. a) $y = 20x - x^2$ b) $51cm^2$ c) 4cm

40. a) $y = 100 + 25x$ b) 1h16min c) 1600ℓ d) 36min

41. $a = 2$ e $b = 3$

42. a) 9 b) 55 c) 52 d) 2 e) $2x + h$

45. par: a, e ; ímpar: b, c
nem par e nem ímpar: d, f

46. a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ d) $\mathbb{R}$
e) $\mathbb{R} - \{-2\}$ f) $\mathbb{R} - \{1\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ h) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
k) $\mathbb{R} - [-2, 2]$ l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 2\}$

48. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 6\}$ e $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
b) $\mathbb{R}$ e $\{3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 3\}$ e $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
d) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$
e) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$ e $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3 \text{ ou } y > 5\}$

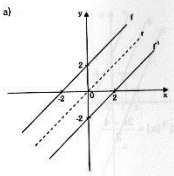
49. g

50. sobrejetoras: f, g ; injetoras: g, h

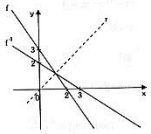
51. b, c

52. a) $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$
c) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ d) $g^{-1}(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}$
e) $h^{-1}(x) = \pm\sqrt{x^2-1}$ f) $h^{-1}(x) = \frac{1-x^3}{4}$

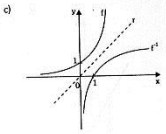
54. a)



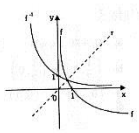
b)



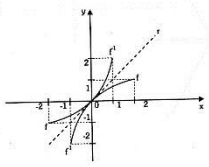
c)



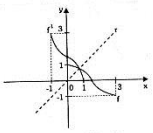
d)



e)



f)



55. $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

57. a) $f(g(x)) = 2x - 5$ b) $(gof)(x) = 2x - 2$ c) $h(f(x)) = 4x^2 + 4x + 1$
d) $(foh)(x) = 2x^2 + 1$ e) $(fof)(x) = 4x + 3$ f) $f(g(h(x))) = 2x^2 - 5$
g) $g(h(2)) = 1$ h) $g(f(f(-1))) = 0$

58. $a = -2$

59. $\mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{4}{3}\right\}$

60. $g(x) = \frac{3x+3}{5}$

61. m = 2 ou m = 3

62. x = 0

63. $\mathbb{R}^*$

64. $(f \circ f^{-1})(x) = x$

65. a) $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{x-7}{6}$ b) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{3x-4}{2}$

66. $x = \frac{5}{6}$

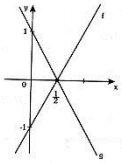
Capítulo 3

67. a) $D_f = \mathbb{R}$, $Im_f = \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R}$, $Im_g = \mathbb{R}$

b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

c) $(0, -1)$ e $(0, 1)$

d)

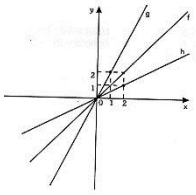


e) não

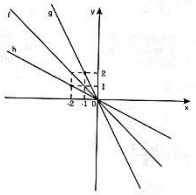
f) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

68.

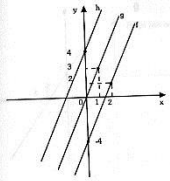
a)



b)

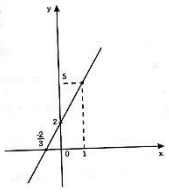


c)

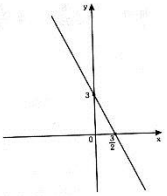


69.

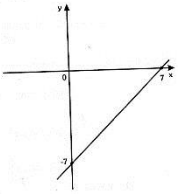
a)



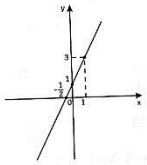
b)



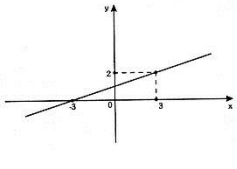
c)



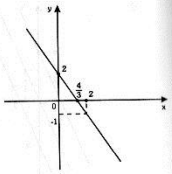
d)



e)

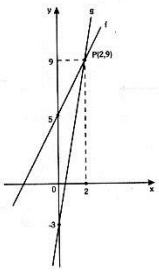


f)



a) 8 b) −1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 0

b) −1 c) $-\frac{8}{75}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$



$\frac{1}{4}$

3,5

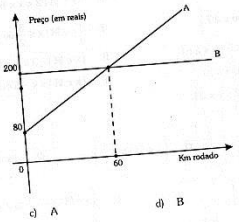
a = 3 e b = 1

a) y = 4x + 3 b) y = 1 − x c) y = 3x

a) y = x + 1 b) $y = -\frac{x}{2} + 2$

4,5

81. a)



b) 60km c) A d) B

82. Sim

84. 1200

85. y = 0,8x ; R$2000,00

86. a) $t_c = 30t + 20$ b) 3 horas c) 20ºC

88. a) para $x > -\frac{15}{2}$, temos $y > 0$
para $x < -\frac{15}{2}$, temos $y < 0$

b) para $x > \frac{21}{4}$, temos $y < 0$
para $x < \frac{21}{4}$, temos $y > 0$

c) para $x > 2$, temos $y < 0$
para $x < 2$, temos $y > 0$

d) para $x > -18$, temos $y > 0$
para $x < -18$, temos $y < 0$

e) para $x > -\frac{1}{2}$, temos $y > 0$
para $x < -\frac{1}{2}$, temos $y < 0$

f) para $x > 4$, temos $y < 0$
para $x < 4$, temos $y > 0$

89. a) acima de 175 unidades b) abaixo de 175 unidades
c) lucro d) 175

90. a) em 2 horas b) antes de 2 horas; após 2 horas c) acima

91. após 2 anos e meio

93. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{8}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{5}\right\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4}{5}\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 14\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{7}\right\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ h) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{8}\right\}$

94. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{2}{3} \text{ ou } x \geq 7\right\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } x \geq 8\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 5 \text{ ou } x \geq 6\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > 2\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } -1 \leq x \leq 2\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$

95. b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

97. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{4}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x \geq \frac{7}{6}\right\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq x < -1\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq -\frac{2}{7} \text{ ou } x > 4\right\}$

99. a) $\mathbb{R} - \{1\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

c) $\mathbb{R}$ d) $\varnothing$

e) $\{-3\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

101. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < \frac{1}{2}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{9} \leq x < 1\right\}$

c) $\varnothing$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -17 < x \leq -10\}$

103. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} \leq x < 3\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{3} < x \leq -2\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leq -1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 9\}$

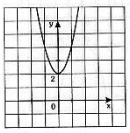
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} \leq x < \frac{7}{4}\right\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < -\frac{16}{3}\right\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 12\}$ h) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{17}{3} < x \leq -\frac{13}{5}\right\}$

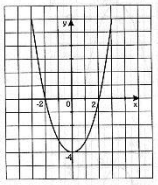
104. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{6}\right\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x \leq 2\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

Capítulo 4

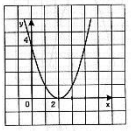
105. a)



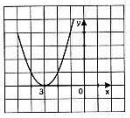
b)



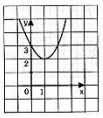
c)



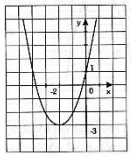
d)



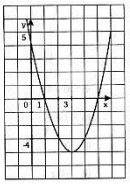
e)



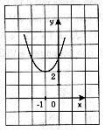
f)

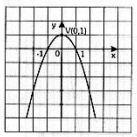


g)

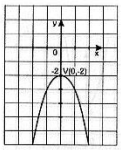


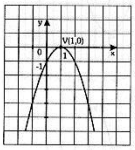
h)



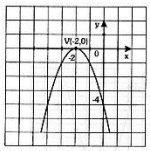


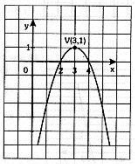
b)



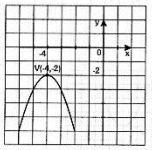


d)





f)



$y = x^2 + 3$, não possui raiz e V(0, 3)
$y = x^2 - 3$, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ e V(0, −3)
$y = (x - 1)^2 + 2$, não possui raiz e V(1, 2)
$y = (x + 1)^2 + 2$, não possui raiz e V(−1, 2)
$y = (x - 1)^2 - 3$, $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$ e V(1, −3)
$y = (x - 3)^2 + 2$, não possui raiz e V(3, 2)

4 e 7 b) −2 c) -1 e $\frac{1}{5}$ d) 0 e 1

não existe f) $-\frac{18}{11}$ e 4 g) 1 h) 1 e $\frac{5}{4}$

$\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ j) 5 e 7 k) −3 e 1 l) 3

$-\frac{5}{2}$ e 6 n) ± 2 e ± 3 o) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ p) −2 e 1

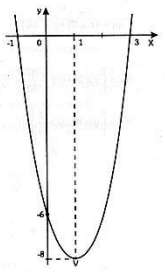
111. a) $\left\{0, -\frac{1}{4}\right\}$ b) $\{0, 3\}$ c) $\left\{0, \frac{2}{5}\right\}$ d) $\{-2, 0\}$

e) $\{-15, 15\}$ f) $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ g) $\{-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\}$ h) $\varnothing$

114. a) $3(x-3)(x+1)$ b) $(x-2)(x-3)$

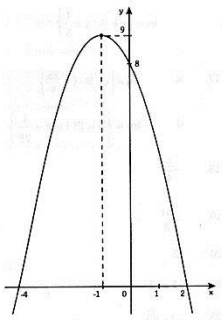
c) $3(x-2)(x+2)$ d) $(x-\sqrt{5})(x-1)$

116. a)



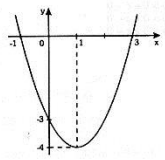
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$

b)



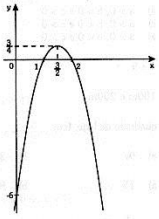
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 9\}$

c)



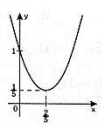
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$

d)



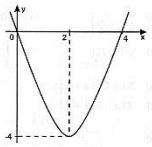
Im = $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{3}{4}\right\}$

e)



$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{1}{5} \right\}$

f)



$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4 \}$

117. a) $Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{25}{8} \right\}$ b) $Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{37}{12} \right\}$

c) $Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{28} \right\}$ d) $Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{1}{3} \right\}$

118. $-\frac{5}{4}$

119. $-\frac{31}{8}$

120. 12

122. -1 ou 3

123. $-1-\sqrt{5}$

124. $\frac{10}{3}m$

126. a) $a > 0, b > 0$ e $c > 0$
c) $a > 0, b < 0$ e $c > 0$
e) $a > 0, b < 0$ e $c > 0$
b) $a < 0, b > 0$ e $c > 0$
d) $a < 0, b > 0$ e $c < 0$
f) $a < 0, b > 0$ e $c = 0$

128. 9 e 9

129. 100m e 200m

130. quadrado de lado 4cm

131. a) 9s b) 324m

132. a) 15 b) R$4775,00

133. $y = \frac{1}{10}x^2 + 3$

134. 4m

135. $\frac{1}{8}$

137. a) $y > 0$ quando $x < 3$ ou $x > 5$
$y < 0$ quando $3 < x < 5$
b) $y > 0$ quando $x < \frac{1}{2}$ ou $x > \frac{3}{4}$
$y < 0$ quando $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$
c) $y > 0$ quando $x \neq \frac{1}{3}$
d) $y > 0$ quando $x \neq -1$
e) $y > 0$ para todo x real
f) $y > 0$ para todo x real
g) $y > 0$ quando $-5 < x < 1$
$y < 0$ quando $x < -5$ ou $x > 1$
h) $y < 0$ quando $x < 0$ ou $x > 2$
$y > 0$ quando $0 < x < 2$
i) $y < 0$ quando $x \neq 5$
j) $y < 0$ quando $x \neq \sqrt{3}$
k) $y < 0$ para todo x real
l) $y > 0$ quando $x < 1$ ou $x > \sqrt{2}$
$y < 0$ quando $1 < x < \sqrt{2}$

139. $m \leq -\frac{1}{4}$

140. $m < -2$

141. a) $m > \frac{1}{4}$ b) não existe m

142. $m = 2$

143. a) entre 4 e 20 unidades
c) 12 unidades e R$25.600,00
b) menor que 4 unidades ou maior que 20 unidades
d) prejuízo

145. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
e) $\mathbb{R}$
g) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$
i) $\varnothing$
b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{5} \text{ ou } x \geq 3 \right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
f) $\varnothing$
h) $\mathbb{R}$
j) $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\}$

147. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } 4 \leq x \leq 6\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$
d) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < -\frac{2}{3} \text{ ou } 0 < x \leq \frac{1}{3} \right\}$
f) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$

150. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$
c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{7} < x < 1 \right\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$
d) $\mathbb{R}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{2} \text{ ou } x > \sqrt{2}\}$

151. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x = 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3 \text{ ou } 5 < x \leq 8\}$
d) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < 3 \right\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \text{ ou } 1 \leq x < 2\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

152. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 7\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

154. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

155. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 0\}$

156. $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 8\}$

Capítulo 5

157. a) $\{-2, 2\}$
d) $\{-5, 3\}$
g) $\{0\}$
j) $\left\{\frac{2}{3}, 6\right\}$
m) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
b) $\{0\}$
e) $\{-19, 11\}$
h) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
k) $\{-3, 3\}$
n) $\{-3, 3\}$
c) $\varnothing$
f) $\{1\}$
i) $\varnothing$
l) $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

159. a) $\{-2, 2\}$
c) $\{-2, 0, 2\}$
e) $\varnothing$
b) $\{-4, 4\}$
d) $\{-2, -1, 3, 4\}$

160. 1

161. $\{-4, 0, 4\}$

162. $a = 0$ e $b = -9$

163. $\{-1, 3\}$

165. a) $\{-3, 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

167. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \text{ ou } x \geq 7\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$
f) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{2}{3} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$

168. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 13\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -8 \text{ ou } x > 7\}$
c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{6} < \right.$

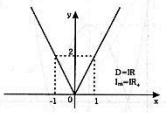
170. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } > -1\}$
c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x \leq 4 \text{ e } x \neq 1 \right\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$
d) $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$

171. a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > \frac{7}{2} \right\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

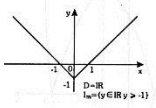
172. $\{-3, -2, -1\}$

173. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}$

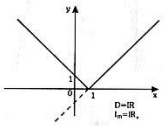
174. a)



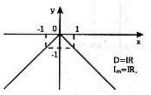
b)



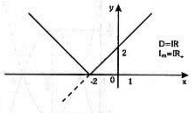
c)



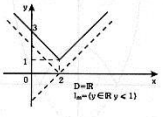
d)



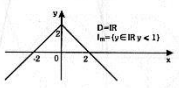
e)



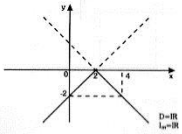
f)



g)

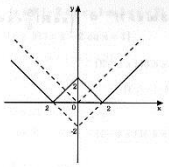


h)

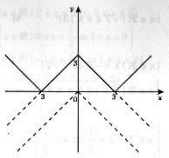


175.

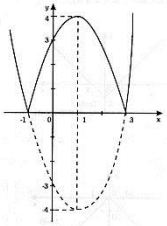
a)



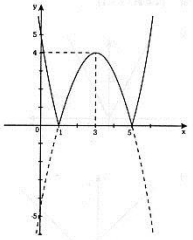
b)



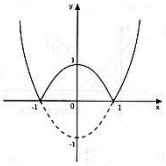
176. a)



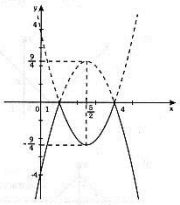
b)



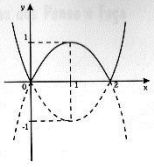
c)



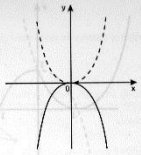
d)



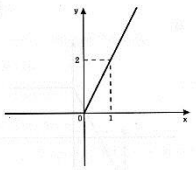
e)



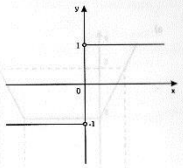
f)



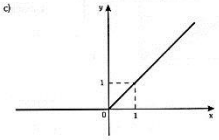
178. a)



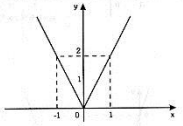
b)



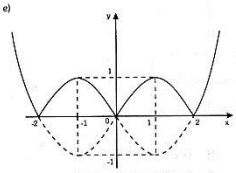
c)



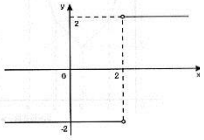
d)



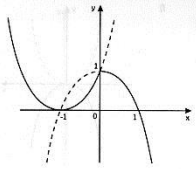
e)



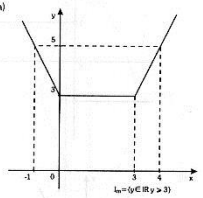
f)



g)

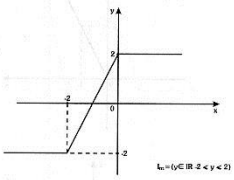


180. a)



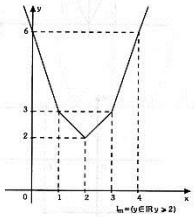
$I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$

b)



$I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 2\}$

181.



$I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

182. a) $\mathbb{R} - \{-4, 2\}$

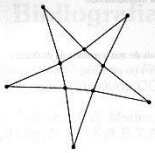
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$

c) $\mathbb{R}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$

Respostas dos Pense e Faça

F1.



F2. 60m

F3. meu amigo, depois de 20 minutos

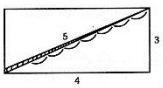
F4. AMO-TE

F5. o duplo 8:88

F6. 4 aves e 3 galhos

F7. 4 (um homem e sua irmã; a filha do homem e o filho da irmã)

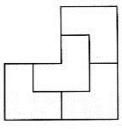
F8.



F9. 300 minutos

F10. a) 84 b) 12

F11.



F12. 1806

F13. 7 cabras e o número de patos fica indeterminado

F14. 6º dia

F15. Pedro; ele percorre, correndo, mais do que a metade da distância

F16. 24 pessoas

F17. 18 minutos

F18. 4

F19. 3 quilos

F20. 4 filhos e 3 filhas

F21. 5 minutos

F22. D: 1089708 d: 12 q: 90809

F24. Eu 24 e tu 18

Bibliografia

Ayres Jr., Frank. *Theory and Problems of First Year College Mathemati* New York : Ed. Schaum Publishing CO, 1958.

Borras, F. Navarro, Tejerizo, J. A. Marin. *Ampliacion de Matemátic para Técnicos*. Madrid : Ed. S.A.E.T.A., 1952.

Boyer, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo : Ed. Edgard Blüch Ltda, 1974.

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais de Matemátic* Lisboa : Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

Catunda, Omar, Danta, Martha Maria de Sousa, Nogueira, Eliana Cos et al. *Matemática - 2º Ciclo Ensino Atualizado*. Rio de Janeirc Ed. Ao Livro Técnico S/A; 1971. vol. 1.

Kalnin, R. A. Álgebra Y Funciones Elementales. Moscou : Ed. Mir, 197.

Lima, Elon Lages. Curso de Análise. Rio de Janeiro : IMPA, 197 vol. 1.

Moise, Edwin E.; *Cálculo - Um Curso Universitário*, São Paulo : E Edgard Blücher Ltda, 1967. vol. 1.

Monteiro, L.H. Jacy. *Iniciação às Estruturas Algébricas*. São Paulo Ed. G.E.E.M, 1968.

Trotta, Fernando, Imenes, Luiz Marcio Pereira, Jakubovic, Jos *Matemática Aplicada*. São Paulo : Editora Moderna Ltda, 197 vol.1.

Revistas

Revista do Professor de Matemática. São Paulo : Sociedade Brasileira d Matemática, ns. 02, 03, 07, 08, 15, 18, 19, 23 e 24, 1995.